YU ISSN 0543-0038



MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

1
152

GOD. XXXVIII ZAGREB 1987–88

»MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST« za učenike srednjih škola izlazi u četiri broja tokom školske godine.

Pojedini se broj prodaje po 300 dinara. Pretplata za 4 broja iznosi 1000 dinara; za inozemstvo dvostruko.

Adresa lista je: »Matematičko-fizički list, Ilica 16/III, 41001 Zagreb, pošt. pretinac 258« Tel.: (041) 425-288. Uplate se vrše na čekovni žiro-račun: *Društvo matematičara i fizičara* Zagreb br. 30102-678-4202

Na uplatnici kao svrhu uplate valja *bezuvjetno naznačiti* »Za Mat. fiz. list«!

SADRŽAJ

Ovaj list oslobođen je plaćanja poreza na promet proizvoda. (Mišljenje Republičkog sekretarijata za prosvjetu, kulturu i fizičku kulturu SRH br. 2591/-1973. od 2. II 1973.)

Tisak Grafičkog zavoda Hrvatske, Zagreb, Frankopanska 26

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA SRH

GOD. XXXVIII BROJ 1	ZAGREB	ŠKOL. GOD. 1987. — 1988.

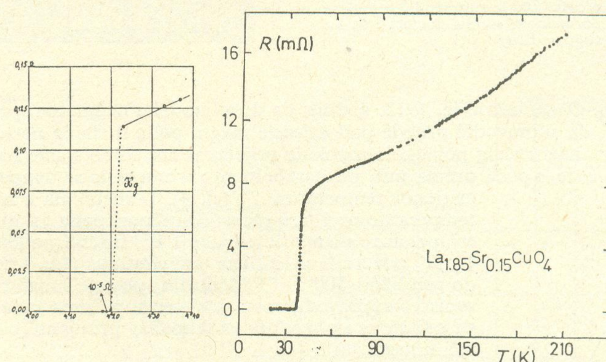
Aktualno!

Supravodljivost (I)

ANA SMONTARA, Zagreb

Supravodljivost je danas jedan od najinteresantnijih i najviše istraživanih pojava u eksperimentalnoj i teorijskoj fizici čvrstog stanja. Razlog za to leži u nedavnom otkriću supravodljivosti na relativno visokim temperaturama, otkriću koje je supravodiče dovelo na prag širih tehničkih primjena, a samim time moglo bi utjecati na razvoj naše civilizacije. Pokušat ćemo stoga razjasniti što je fenomen supravodljivosti; kako je otkriven i izučavan, te koje su moguće primjene.

Godine 1908. nizozemski fizičćr *H. Kamerling-Onnes* prvi puta je dobio tekući helij (temperatura ukapljivanja helija je $-268{,}95°$C ili 4,2 K). Time je granica niskotemperaturnih istraživanja pomaknuta do neposredne blizine apsolutne nule, najniže moguće temperature koja iznosi $-273{,}15°$ C ili OK[1]. Mjereći električni otpor platine i zlata on je zaključio da otpor metala približavanjem



Sl. 1a. Električni otpor uzorka žive ovisno o temperaturi u kelvinima. Ovaj graf *Kamerlingh-Onnesa* označio je otkriće supravodljivosti

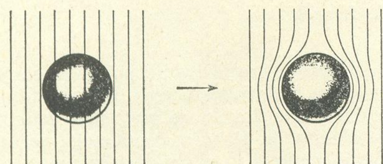
Sl. 1b. Električni otpor uzorka $La_{1,85}Sr_{0,15}CuO_4$ novog visokotemperaturnog supravodiča. Ovaj graf rezultat je početka istraživanja visokotemperaturne supravodljivosti u Jugoslaviji

apsolutnoj nuli teži prema konstantnoj vrijednosti. Analognim ispitivanjem na živi opazio je 1911. godine da električni otpor u blizini temperature od 4 K naglo pada na nulu (sl. 1a). U uzorku žive na toj temperaturi, tzv. kritičnoj temperaturi T_c, dolazi do prijelaza iz stanja normalne metalne

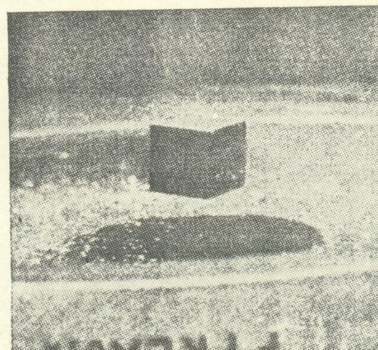
[1] Eksperimentalno nije postignuta apsolutna nula; do sada najniža u laboratoriju postignuta temperatura je 38 μK.

vodljivosti (N stanje) u supravodljivo stanje (S stanje). Pojava supravodljivosti nastaje samo ako je gustoća struje (jakost električne struje po jedinici površine poprečnog presjeka vodiča) u uzorku dovoljno mala. Prijeđe li ona neku kritičnu vrijednost, električni otpor uzorka ponovo se uspostavlja, uzorak prelazi iz supravodljivog u normalno stanje. U supravodljivom stanju električni otpor za istosmjernu struju je nula ili vrlo blizu nuli (npr. otpornost je manja od 10^{-19} Ωm, dok je otpornost bakra na istim temperaturama oko 10^{-7} Ωm) i stalna električna struja teče bez slabljenja u supravodljivim prstenovima nekoliko godina. *J. File* i *R. G. Mills* 1963. godine, na osnovu mjerenja električne struje u zavojnici od $Nb_{0,75}Zr_{0.25}$, zaključili su da je vrijeme opadanja supravodljive struje oko 100 000 godina.

Materijali koji postaju supravodljivi ispod neke kritične temperature T_c pokazuju ne samo jedinstvene električne nego i magnetske osobine koje se ne mogu objasniti samo svojstvom da je njihov električni otpor u supravodljivom stanju gotovo nula. *W. Meissner* i *R. Ochsenfeld* 1933. godine, utvrdili su eksperimentalno da se supravodiči u slabom[2] magnetskom polju ponašaju kao idealni dijamagnetici (magnetska susceptibilnost dijamagnetika je manja ili jednaka nuli), sa magnetskom indukcijom jednakom nuli u svojoj unutrašnjosti. Ako se uzorak stavi u magnetsko polje i hladi do ispod temperature prijelaza u supravodljivo stanje, magnetski tok prisutan u uzorku prije prijelaza u supravodljivo stanje, istisnut je iz uzorka u supravodljivom stanju (sl. 2, Meissner efekt). To svojstvo supravodiča omogućuje nam da lako utvrdimo postojanje supravodljivog stanja (sl. 3).

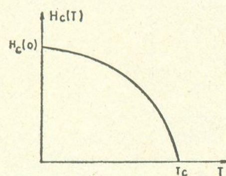


Sl. 2. *Meissner efekt* u supravodljivoj kugli hlađenoj u konstantnom magnetskom polju, pri prijelazu ispod kritične temperature T_c linije magnetske indukcije B bivaju istisnute iz kugle



Sl. 3. Magnet u obliku kocke slobodno lebdi na magnetskom jastuku stvorenom strujama u supravodiču (disku od supravodljivog materijala) kad je supravodič u supravodljivom stanju (u normalnom stanju magnet leži na supravodiču)

H. Kamerling-Onnes otkrio je, 1913. godine, da dovoljno jako magnetsko polje može razoriti supravodljivost, tj. da supravodič prijeđe pod utjecaje magn. polja u stanje normalne vodljivosti. Kritična vrijednost magnetskog polja koja uzrokuje prijelaz u normalno stanje najveća je na temperaturi apsolutne nule, a pada prema nuli po parabolnom zakonu kada se temperatura približava kritičnoj temperaturi T_c (sl. 4). U metalima s niskom kritičnom temperaturom i vrijednost kritičnog polja je mala. Za kritične temperature manje ili jednake 1 K kritično polje je reda veličine 1 mT, poveća li se kritična temperatura, tada kritično polje raste do približno 100 mT. Međutim, postoje i materijali u kojima se svojstvo supravodljivosti gubi tek u poljima reda veličine 10T pa su oni stoga i pogodniji za tehničku primjenu (o čemu će biti riječi u nastavku).



Sl. 4. Grafički prikaz napretka o otkrivanju supravodljivosti na sve višim temperaturama otkada je ta pojava 1911. godine otkrivena

Svojstvo supravodljivosti pokazuju mnogi metali, legure i spojevi. Do 1986. godine, kritične temperature supravodljivih materijala kretale su se od vrlo niskkih vrijednosti 0,01 K za neke poluvodiče do 23,2 K za leguru Nb_3Ge. Danas, otkrićem visokotemperaturnih supravodiča (sl. 1b) granica kritičnih temperatura pomakla se prema 100 K (sl. 5) a otvorena je mogućnost da se pomakne i više. Zanimljivo je da u mnogim metalima supravodljivost nije primjećena ni do najnižih temperatura (0,01 K). Alkalijski i plemeniti metali, iako su poznati kao dobri vodiči pri normalnim temperaturama, ne pokazuju supravodljivost sve do 0,05 K.

[2] Magnetska susceptibilnost dijamagnetskih tvari za relativno slaba magnetska polja ne ovisi o jakosti polja.

Feromagnetski metali također ne pokazuju svojstvo supravodljivosti. Elementi, za koje je poznato da su supravodiči, prikazani su u tablici 1, zajedno sa svojim temperaturama prijelaza, dok su temperature prijelaza nekih supravodljivih spojeva dane u tablici 2.

Sl. 5. Kritično magnetsko polje kao funkcija temperature

Transition temperature in K
Critical magnetic field at absolute zero in gauss (10^{-4} tesla)

Li	Be											B	C	N	O	F	Ne
Na	Mg											Al 1.140 105	Si*	P*	S	Cl	Ar
K	Ca	Sc	Ti 0.39 100	V 5.38 1420	Cr*	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn 0.875 53	Ga 1.091 51	Ge*	As*	Se*	Br	Kr
Rb	Sr	Y*	Zr 0.546 47	Nb 9.50 1980	Mo 0.92 95	Tc 7.77 1410	Ru 0.51 70	Rh	Pd	Ag	Cd 0.56 30	In 3.4035 293	Sn (w) 3.722 309	Sb*	Te*	I	Xe
Cs*	Ba*	La fcc 6.00 1100	Hf 0.12	Ta 4.483 830	W 0.012 1.07	Re 1.4 198	Os 0.655 65	Ir 0.14 19	Pt	Au	Hg (α) 4.153 412	Tl 2.39 171	Pb 7.193 803	Bi*	Po	At	Rn
Fr	Ra	Ac															
			Ce*	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu 0.1	
			Th 1.368 1.62	Pa 1.4	U*(α)	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr	

Tablica 1. Supravodljivi elementi u periodnom sistemu. Temperature prijelaza u supravodljivo stanje naznačene su u gornjoj koloni a kritična magnetska polja na apsolutnoj nuli u donjoj koloni. Zvjezdica označuje elemente koji su supravodljivi u tankim filmovima ili pod visokim tlakom u kristalnoj strukturi

Spoj	Tc (K)	Spoj	Tc (K)
Nb_2Sn	18.05	V_3Ga	16.5
Nb_2Ge	23.2	V_3Si	17.1
Nb_2Al	17.5	$Pb_1Mo_{5.1}S_6$	14.4
NbN	16.0	Ti_2Co	3.44
$(SN)_x$ polymer	0.26	La_3In	10.4

Tablica 2. Temperature supravodljivog prijelaza nekih spojeva

Supravodljivo stanje je uređeno stanje vodljivih elektrona u metalu, elektroni na temperaturama ispod temperature prijelaza uređuju se tvoreći slabo vezane parove (tzv. *Cooperove parove*), a na temperaturama višim od temperature prijelaza napuštaju to uređenje. Prirodu i porijeklo takvog uređenja prvi su, 1957. godine, objasnili *J. Bardeen*, *L. N. Cooper* i *J. R. Schriefer;* o tome će biti riječi u slijedećem broju.

Lagrangeov zakon i njegove primjene

BORIS J. PAVKOVIĆ, Zagreb

U br. 4 MFL-a (1986/87) objavljen je članak *Branimira Galića* pod naslovom »Zakon o težištu i njegove primjene«. U ovom se članku tretira slična problematika, tj. pokazuje se kako se pomoću jednog drugog fizikalnog zakona i to *Lagrangeovog zakona o inerciji* (J. L. Lagrange, 1736—1813, francuski matematičar, fizičar i astronom) mogu rješavati izvjesni matematički zadaci.

Osnovni objekt naših razmatranja je materijalna točka. *Materijalnom točkom* zovemo uređeni par (A, m), koji se sastoji od točke A i mase $m > 0$, $m \in R$. Intuitivno treba to shvatiti kao da imamo točku i u njoj smještenu masu. Svaki konačan skup materijalnih točaka zovemo *sistemom materijalnih točaka.*

Neka je sada $\mathcal{S} = \{(A_1, m_1), (A_2, m_2), \ldots, (A_n, m_n)\}$ sistem materijalnih točaka, P bilo koja točka prostora i $d_i = |A_i, P|$, $i = 1, \ldots, n$ udaljenosti točaka A_i od točke P. Zbroj

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$$

zovemo *momentom inercije sistema $\mathcal{S}$ s obzirom na točku P.*

Za moment inercije vrijedi ovaj **Lagrangeov zakon o inerciji:**

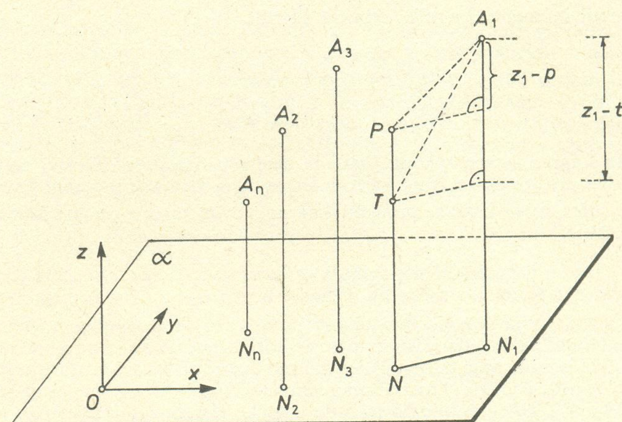
Ako je P bilo koja točka prostora, T težište sistema $\mathcal{S}$ i I_p, I_T momenti inercije sistema $\mathcal{S}$ s obzirom na točke P i T, onda vrijedi

$$I_p = I_T + \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot |PT|^2. \quad (1)$$

Dokaz. Dokaz je posve elementaran. Dovoljno je znati formulu za radijvektor težišta sistema izvedenu u navedenom članku Branimira Galića.

Najprije, ako je $P \equiv T$ onda je tvrdnja isnitita nà trivijalni način. Pretpostavimo stoga da je $P \not\equiv T$. Postoji beskonačno mnogo ravnina okomitih na PT i odaberimo onu od njih za koju su sve točke sistema $\mathcal{S}$ s njezine iste strane. Označimo tu ravninu sa α (v. sliku).

Označimo dalje s $N, N_1, \ldots, N_n$ nožišta okomica spuštenih iz točaka $P, A_1, \ldots, A_n$ na ravninu α, sa $p, z_1, \ldots, z_n$ udaljenosti tih točaka od α i sa t udaljenost točke T od α. Odaberimo prostorni pravokutni koordinatni sustav tako da mu se ishodište O i koordinatne osi Ox i Oy nalaze u α. Os Oz je tada okomita na α. Uz tako odabrani koordinatni sustav brojevi $p, t, z_1, \ldots, z_n$ su tada aplikate



(treće koordinate, z-koordinate) točaka $P, T, A_1, \ldots, A_n$. Neka je $\vec{r}_T$ radijvektor težišta T s obzirom na taj koordinatni sustav. Tada je

$$\vec{r}_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Iz ove formule za z-koordinate navedenih točaka dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} m_i z_i = (\sum_{i=1}^{n} m_i) \cdot t. \qquad (2)$$

Pretpostavimo da je sada $N \not\equiv N_1$ (na slučaj $N \equiv N_1$ osvrnut ćemo se malo kasnije). Promotrimo trapez NN_1A_1T. Sa slike vidimo da vrijedi

$$|TA_1|^2 = (z_1 - t)^2 + |NN_1|^2 \qquad (3)$$

i

$$|PA_1|^2 = (z_1 - p)^2 + |NN_1|^2. \qquad (4)$$

Odbijanjem jednakosti (3) od (4) dobivamo

$$|PA_1|^2 - |TA_1|^2 = (z_1 - p)^2 - (z_1 - t)^2 = (z_1 - p - z_1 + t)(z_1 - p + z_1 - t) =$$
$$= (t - p)(2z_1 - p - t) = (t - p)[t - p + 2(z_1 - t)] = (t - p)^2 + 2(t - p)(z_1 - t).$$

Dakle, imamo

$$|PA_1|^2 - |TA_1|^2 = |PT|^2 + 2(t - p)(z_1 - t).$$

Pomnožimo li ovu jednadžbu sa m_1, dobit ćemo

$$m_1 |PA_1|^2 - m_1 |TA_1|^2 = m_1 |PT|^2 + 2(t - p)(m_1 z_1 - m_1 t). \qquad (5)$$

Lako se vidi da jednakosti (3), (4) pa onda i (5) vrijede i u slučaju $N \equiv N_1$, pa je time ovaj slučaj apsolviran.

Analogno se dobiva

$$m_2 |PA_2|^2 - m_2 |TA_2|^2 = m_2 |PT|^2 + 2(t - p)(m_2 z_2 - m_2 t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m_n |PA_n|^2 - m_n |TA_n|^2 = m_n |PT|^2 + 2(t - p)(m_n z_n - m_n t).$$

Zbrajanjem ovih jednakosti i (5) dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i |PA_i|^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i |TA_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i |PT|^2 + 2(t - p)(\sum_{i=1}^{n} m_i z_i - \sum_{i=1}^{n} m_i t).$$

Radi (1), po definiciji momenta inercije, odavde slijedi

$$I_P = I_T + \sum_{i=1}^{n} m_i \, |P\,T|^2,$$

a to je trebalo i dokazati.

Napomena. Iz Lagrangeovog zakona [neki ga nazivaju *Steinerov teorem*] neposredno slijedi da je težište ona točka prostora s obzirom na koju sistem ima najmanji moment inercije.

Pokažimo na primjerima kako se pomoću Lagrangeovog zakona mogu rješavati neki zadaci elementarne geometrije.

Primjer 1. Oko jednakostraničnog trokuta opisana je kružnica. Dokažite da zbroj kvadrata udaljenosti, od vrhova trokuta do točke na opisanoj kružnici, ne ovisi o njenom položaju.

Osnovna ideja rješavanja ovakvih zadataka svodi se na to da zadanoj geometrijskoj konfiguraciji pvidružimo na izvjesni način jedan sistem materijalnih točaka tako da Lagrangeov zakon primijenjen na taj sistem daje upravo onaj odnos, kojeg želimo dokazati. U ovom slučaju imamo jednakostranični trokut $A_1\,A_2\,A_3$ i točku P na opisanoj kružnici. Promotrimo sistem materijalnih točaka $\{(A_1, 1), (A_2, 1), (A_3, 1)\}$, kojeg dobijemo tako da u točke A_1, A_2, A_3 smjestimo jedinične mase. Označimo sa O središte opisane kružnice. Težište navedenog sistema je upravo u točki O. Lagrangeov zakon daje

$$I_P = I_O + 3 \cdot |P\,O|^2.$$

Označimo udaljenosti točaka A_i od P sa d_i, $i = 1, 2, 3$. Tada je $I_P = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$, $I_O = 3r^2$, $|P\,O| = r$, gdje je r polumjer trokutu opisane kružnice. Uvrstimo li ove vrijednosti u prethodnu formulu dobivamo

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 6\,r^2,$$

pa zaista zbroj kvadrata udaljenosti ne ovisi o položaju točke P, već samo o trokutu.

Primjer 2. Odredite duljine simetrala unutarnjih kutova trokuta, kojemu su zadane duljine stranica.

Neka je ABC zadani trokut, $a = |B\,C|$, $b = |A\,C|$, $c = |A\,B|$ i s_γ duljina simetrale kuta γ tog trokuta. Neka je dalje C_1 sjecište te simetrale sa stranicaom AB (nacrtajte sliku). Smjestimo sada u A i B takve mase da C_1 bude težište tako dobivenog sistema materijalnih točaka. Neka je $|B\,C_1| = a_1$, $|A\,C_1| = b_1$. Prema teoremu o simetrali kuta u trokutu u A treba smjestiti masu b_1, a u B masu a_1. Dakle $\mathscr{S} = \{(A, a_1), (B, b_1)\}$. Nađimo momente inercije sistema $\mathscr{S}$ s obzirom na točke C i C_1. Dobiva se

$$I_C = a_1\,b^2 + b_1\,a^2, \; I_{C1} = a_1\,b_1^2 + b_1\,a_1^2.$$

Prema Lagrangeovom teoremu je

$$I_C = I_{C1} + (a_1 + b_1) \cdot s_\gamma{}^2.$$

Uvrstimo li ovamo nađene izraze za I_C i I_{C1} dobit ćemo

$$a_1\,b^2 + b_1\,a^2 = a_1\,b_1^2 + b_1\,a_1^2 + (a_1 + b_1) \cdot s_\gamma^2. \qquad (6)$$

Prema teoremu o simetrali vrijedi

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{a_1 + b_1}{a + b} = \frac{c}{a + b}.$$

Odavde je

$$a_1 = \frac{a\,c}{a + b}, \; b_1 = \frac{b\,c}{a + b}.$$

Uvrstimo li ovo u (6) i uzmemo u obzir da je $a_1 + b_1 = c$, dobit ćemo

$$s_\gamma^2 = a\,b\left[1 - \frac{c^2}{(a + b)^2}\right].$$

Analogni izrazi dobivaju se za s_α i s_β.

Primjer 3. U kružnicu je upisan četverokut s međusobno okomitim dijagonalama. Dokažite da je zbroj kvadrata duljina njegovih suprotnih stranica jednak kvadratu dijametra kružnice.

Neka je $ABCD$ četverokut s okomitim dijagonalama AC i BD upisan u zadanu kružnicu. Označimo sa O središte kružnice i sa S sjecište dijagonala. Pridružimo ovom četverokutu sistem $\mathcal{S} = \{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$ i neka je T njegovo težište. Pomoću zakona o težištu može se pokazati da je težište T sistema $\mathcal{S}$ u polovištu dužine OS. Primijenimo Lagrangeov zakon na točke S i O. Dobivamo

$$I_S = I_T + 4\,|T\,S|^2,\ I_0 = I_T + 4\,|O\,T|^2.$$

Kako je $|T\,S| = |O\,T|$, to iz ovih jednakosti slijedi

$$I_S = I_0,$$

a odavde je

$$|S\,A|^2 + |S\,B|^2 + |S\,C|^2 + |S\,D|^2 = 4r^2,$$

gdje je sa r označen polumjer kružnice. Prema Pitagorinom teoremu je

$$|SA|^2 + |SB|^2 = |AB|^2,\ |SC|^2 + |SD|^2 = |CD|^2.$$

Ako to uvrstimo u prethodnu jednakost dobivamo

$$|AB|^2 + |CD|^2 = (2r)^2.$$

Analogno se tvrdnja dokazuje za drugi par suprotnih stranica.

Primjer 4. Zadane su duljine t_a, t_b, t_c težišnica trokuta i polumjer r tom trokutu opisane kružnice. Odredite udaljenost težišta trokuta od središta njemu opisane kružnice.

Neka je ABC trokut i O središte opisane kružnice. Promatramo sistem $\mathcal{S} = \{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$ i neka je T njegovo težište. Prema Lagrangeovom zakonu imamo

$$I_0 = I_T + 3\,|O\,T|^2.$$

Očito je $I_0 = 3r^2$ i $I_T = \frac{4}{9}(t_a^2 + t_c^2 + t_c^2)$. Ako to uvrstimo u prethodnu formulu dobit ćemo za traženu udaljenost

$$|OT| = \sqrt{r^2 - \frac{4}{27}(t_a^2 + t_c^2 + t_c^2)}.$$

Pokazat ćemo sada kako se Lagrangeov zakon koristi u elementarnoj algebri.

Kako su momenti inercije uvijek pozitivni to iz Lagrangeovog zakona slijedi

$$(\sum_{i=1}^{n} m_i) \cdot |P\,T|^2 \leqslant I_P, \tag{7}$$

pri tome znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $I_T = 0$, tj. u slučaju kada se točke sistema podudaraju: $A_1 \equiv A_2 \equiv \ldots \equiv A_n \equiv T$.

Birajući točke A_i i P na zgodan način i stavljajući u njih zgodno odabrane mase možemo pomoću (7) dobiti razne interesantne nejednakosti. Na taj način (7) postaje pravo izvorište za dobivanje raznih nejednakosti. Ilustrirajmo to na dva primjera.

Primjer 5. Dokažite da za realne brojeve $a_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$ vrijedi

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}},$$

pri čemu znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $a_1 = \ldots = a_n$.

Uzmimo u ravnini točku P i poluzraku (polupravac) kojoj je početak u P. Odaberimo na toj poluzraci redom točke $A_1, A_2, \ldots, A_n$ takve da je

$$|P\,A_1| = a_1,\ |P\,A_2| = a_2, \ldots, |P\,A_n| = a_n.$$

Promotrimo sistem $\mathscr{S} = \{(A_1, 1), (A_2, 1), \ldots, (A_n, 1)\}$. Tada je $\Sigma m_i = n$ i moment inercije sistema $\mathscr{S}$ s obzirom na točku P jednak je $I_P = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$. Označimo težište od $\mathscr{S}$ sa T i neka je P ishodište koordinatnog sustava. Za radijvektor težišta od $\mathscr{S}$ dobivamo

$$\vec{r}_T = \frac{\Sigma \vec{r}_i}{n}, \tag{8}$$

gdje je sa $\vec{r}_i$ označen radijvektor točke A_i, $i = 1, \ldots, n$. Ako sa $\vec{e}$ označimo jedinični vektor u smjeru vektora $\overrightarrow{PA_1}$, onda je

$$\vec{r}_i = a_i \vec{e}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Tada je $\vec{r}_T = |PT| \vec{e}$, pa uvrštavanjem u (8) dobivamo

$$|PT| \vec{e} = \frac{a_1 \vec{e} + \ldots + a_n \vec{e}}{n},$$

odnosno

$$|PT| = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Ako to i I_P uvrstimo u (7) dobit ćemo

$$n \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 \leqslant a_1^2 + \ldots + a_n^2,$$

a odavde odmah slijedi tvrdnja. Znak jednakosti vrijedi samo ako je $A_1 \equiv A_2 \equiv \ldots \equiv A_n \equiv T$, tj. ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Primjer 6. Dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 \leqslant \sqrt{(1 + 2 + \ldots + n)(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3)},$$

pri čemu znak jednakosti vrijedi samo ako je $n = 1$.

Odaberimo u ravnini točku P i poluzraku s početkom u P kao i u prethodnom zadatku. Neka su A_i točke te poluzrake određene sa $|PA_i| = i$, $i = 1, \ldots, n$. Smjestimo u te točke mase $m_i = i$. Tada je

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = 1 + 2 + \ldots + n.$$

Neka je $\vec{e}$ odabran na način iz primjera 5. Tada dobivamo

$$|PT| = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{1 + 2 + \ldots + n}.$$

Moment inercije I_P sistema $\mathscr{S} = \{(A_1, 1), (A_2, 2), \ldots, (A_n, n)\}$ jednak je

$$I_P = 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + \ldots + n \cdot n^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3.$$

Ako to uvrstimo u (7), dobit ćemo

$$(1 + 2 + \ldots + n) \left(\frac{1^2 + 2^2 + \ldots n^2}{1 + 2 + \ldots + n}\right) \leqslant 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3,$$

a odavde odmah slijedi tvrdnja. Očito da znak jednakosti vrijedi samo ako se sve točke podudaraju, tj. samo za $n = 1$.

Na kraju valja napomenuti da se neki od navedenih zadataka mogu riješiti i na drugi način; mi smo ovdje htjeli pokazati kako se to radi pomoću Lagrangeovog zakona o inerciji.

Korisno je da za vježbu upotrebom tog zakona pokušate riješiti slijedeće **zadatke**:

1. Oko pravilnog tetraedra opisana je sfera. Dokažite da zbroj kvadrata udaljenosti točke sfere od vrhova tetraedra ne ovisi o njenom položaju na sferi.

2. Oko pravilnog n-terokuta opisana je kružnica. Dokažite da zbroj kvadrata udaljenosti točke opisane kružnice od vrhova ne ovisi o njenom položaju na kružnici.

3. U jednakostranični trokut upisana je kružnica. Dokažite da zbroj kvadrata udaljenosti točke na toj kružnici od vrhova trokuta ne ovisi o njenom položaju na toj kružnici.

4. Dokažite ovaj *teorem Stewarta* (M. Stewart, 1717—1785, engleski geometričar): Ako je C_1 bilo koja točka na stranici AB trokuta ABC, onda vrijedi

$$|CA|^2 \cdot |BC_1| + |BC|^2 \cdot |AC_1| - |CC_1|^2 \cdot |AB| = |AC_1| \cdot |BC_1| \cdot |AB|.$$

5. Dokažite ovaj *teorem Eulera* (L. Euler 1707—1783, švicarski matematičar): Ako je $A_1A_2A_3A_4$ bilo koji četverokut (ravninski ili prostorni), a P i Q polovišta njegovih dijagonala A_1A_3 i A_2A_4, onda vrijedi

$$|A_1 A_2|^2 + |A_2 A_3|^2 + |A_3 A_4|^2 + |A_4 A_1|^2 = |A_1 A_3|^2 + |A_2 A_4|^2 + 4\,|PQ|^2.$$

Napomena. Ovo je poopćenje teorema o zbroju kvadrata dijagonala paralelograma.

6. Dokažite da za realne brojeve $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ vrijedi

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2,$$

pri čemu znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $a_1 = \ldots = a_n$.

7. Dokažite da za realne brojeve $a_i > 0$, $b_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ vrijedi

$$a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \leqslant \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}.$$

Kada vrijedi znak jednakosti?

Napomena. Ova se nejednakost zove *nejednakost Cauchy-Bunjakovskog.*

Određivanje nultočaka funkcije pomoću mikroračunala

SINIŠA GRGIĆ, maturant, Osijek

Odrediti nultočku neke funkcije je naoko sasvim jednostavan, a u biti pak veoma složen problem, jer postoji čitav niz funkcija koje imaju i više nultočaka u određenom intervalu i ne uvijek tako pravilnog rasporeda kakvog ga ima npr. funkcija $\sin x$, a često se susrećemo i sa gotovo nerješivim problemima. Za rješavanje ovakovih problema može nam vrlo dobro poslužiti mikroračunalo, u prvom redu zbog svoje velike brzine računanja, jer njime možemo funkciju analizirati čak i »pješačenjem«.

Upravo to »pješačenje« je glavna, osnovna zamisao traganja za što približnijom vrijednošću nultočke pomoću računala.

1. DEFINIRANJE FUNKCIJE

Budući da rješavanju jednadžbe $f(x) = 0$ pristupamo programski to znači da bismo morali definirati funkciju općenito, tj. kao preslikavanje nekog realnog broja x u neki novi realni broj $f(x)$ vodeći računa da ju zadajemo isključivo kao funkciju jednog argumenta x, koristeći »uhodanu« kompjutersku terminologiju za pojedine funkcije kao npr. $\sin x$ = SIN (X) ili e^x = EXP (X) i sl.

Općenito funkciju definiramo na računalu COMMODORE 64 ovako:

```
LIST 10—40
10 INPUT "FUNKCIJA F(X) = " ; F $
20 PRINT CHR$ (147) : PRINT "40 DEFFN F (X) = " ; F $: PRINT "GOTO 40"
30 POKE 631, 19: POKE 632, 13: POKE 633,13: POKE 634,13: POKE 198,4: END
40 REM ovu programsku liniju definira kompjuter
```

Kada pokrenemo ovaj program na ekranu se pojavljuje:

```
RUN
? SIN (X) * EXP (—X)
```

Na postavljeni upit odgovorili smo gore ispisanim funkcijskim oblikom. Sada si računalo sâmo definira upisanu funkciju unutar programske linije 4Ø i time prestaje rad prvog dijela programa (END), ali se računalo sâmo opet starta od programske linije 4Ø (GOTO 4Ø).

2. GRANICE INTERVALA I FINOĆA PRETRAGE

Kada smo definirali funkciju potrebno je saznati od korisnika granice intervala u kojima očekuje nultočke upisane funkcije. Isto je tako bitno unijeti i tzv. finoću pretrage (FI) koja utječe na točnost ili bolje rečeno približnost rezultata, ali isto tako i na vrijeme izvođenja programa. Ona predstavlja zapravo »korak« u kojem se pretraga vrši (v. sliku).

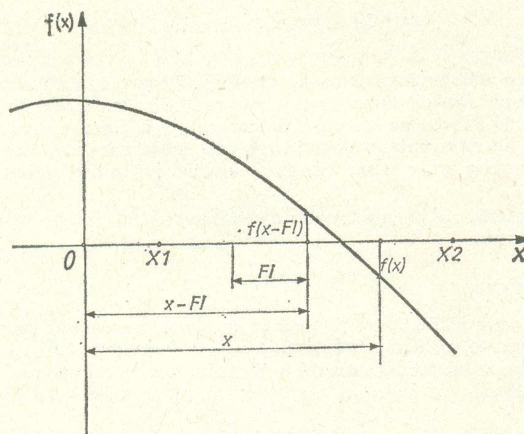
```
LIST5Ø—7Ø

5Ø PRINT CHR$ (147) : K = 1 : DIM X (99) : FOR N = Ø TO 99 : X (N) = 919 : NEXT N
6Ø INPUT "GRANICE INTERVALA X1, X2, " ; X1, X2
7Ø INPUT "FINOĆA PRETRAGE "; F1
```

Ovdje je veoma bitno postaviti granice intervala tako da upisana funkcija bude definirana unutar tih granica. U protivnom će računalo javiti grešku (? DIVISION BY ZERO).
Tada treba ispisati RUN 4Ø te ponovno unijeti nove granice intervala.

3. PRETRAGA

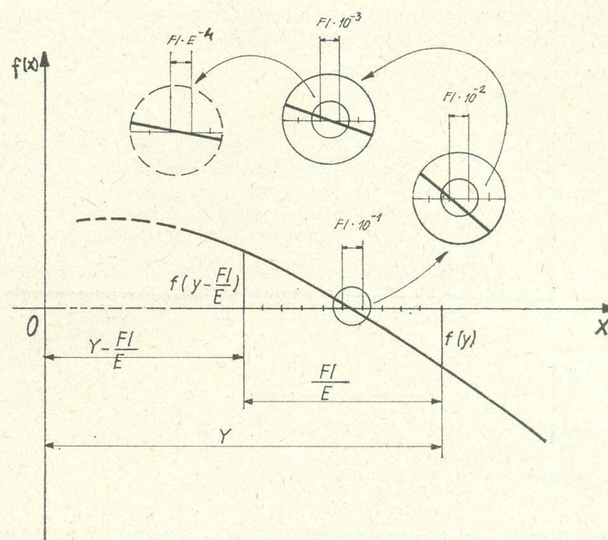
Pretraga, tj. traganje za nultočkama zadane funkcije zasniva se na vrlo jednostavnim logičkim načelima. Naime, mi dijelimo zadani interval na podintervale određenim brojem točaka čije se apscise međusobno razlikuju za FI (finoća pretgrage). Sada za svaku od tih točaka x tražimo njenu funkcijsku vrijednost $f(x)$ i promatramo da li se promijenio predznak toga $f(x)$ u odnosu na $f(x\text{-FI})$, tj. u odnosu na vrijednost funkcije za prethodno promatranu točku (slika 1). Ako je predznak ostao nepromijenjen (ako je SGN (FNF (X)) = SGN (FNF (X-FI))) uzimamo slijedeći x i nastavljamo pretragu, a ako je došlo do promjene predznaka zaključujemo da je u novom intervalu od x-FI do x došlo do presjeka grafa zadane funkcije sa osi apscisa.



Sl. 1.

Da bismo došli do što točnijeg presjecišta, odnosno što bliže nultočki, dijelimo taj novi interval na 10 novih dijelova i vršimo pretragu analognu već spomenutoj samo u mnogo manjim veličinama. Sve se ovo ponavlja sve dok ne stignemo do reda veličine 10^{-9}, a time i do najtočnijih rezultata koje možemo dobiti na računalu ovom metodom.

Ovakvo rješavanje, gdje se rješenju »približavamo« spiralno prema centru koji predstavlja traženu nultočku, u biti je grafičko rješavanje. Konačan rezultat dobivamo kao aritmetičku srednju vrijednost dviju susjednih točaka različitog predznaka međusobno udaljenih za FI · 10^{-9} (slika 2).



Sl. 2.

Tako program dalje izgleda ovako:

```
80  IF X1=X2 THEN 60
90  IF X1>X2 THEN K=X1:X1=X2:X2=K
100 FOR X = X1+FI TO X2 STEP FI
110  GOSUB 200
120 NEXT X: END
200  X0=X-FI:Z=X:E=10
210  IF SGN(FNF(X))=SGN(FNF(X0)) THEN RETURN
220  FOR N=1 TO E
230   Y0=Z-FI/E*N:Y=Z-FI/E*(N-1)
240   IF SGN(FNF(Y))=SGN(FNF(Y0)) THEN NEXT N
250  IF E<1E09 THEN E=E*10:Z=Y:GOTO 220
260  X(K)=INT((Y+Y0)/2*1E09)/1E09
270  IF VAL(LEFT$(STR$(X(K-1)),9))=VAL(LEFT$(STR$(X(K)),9)) THEN 290
280  PRINT X(K) : K=K+1
290 RETURN

READY.
```

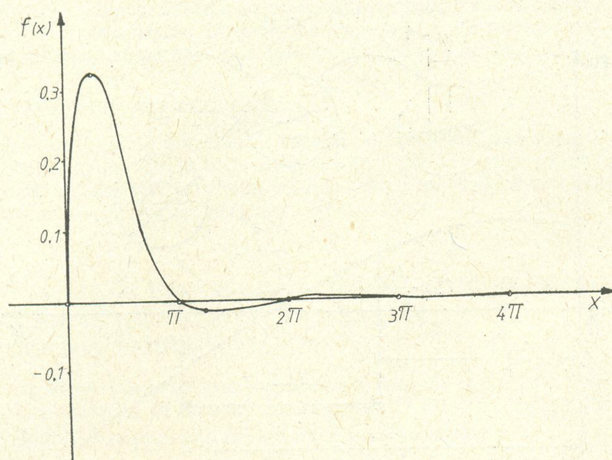
Budući da smo funkciju već ranije zadali, na ekranu dobivamo:

```
GRANICE INTERVALA X1, X2 ? Ø, 7
FINOĆA PRETRAGE? 1
Ø
3.14159265
6.28318531
```

Rezultati na izlazu su zadovoljavajući jer smo dobili broj π na 8 točnih decimala. Da smo za finoću pretrage uzeli nešto veći broj, dobili bismo »grublje« rezultate, a isto tako bi postojala mogućnost da koja nultočka izostane. No, ako nam je promatrani interval neke funkcije mnogo veći potrebno je uzeti i veći FI, kao npr. 2, 3, 5 ili dr. da bi se program brže odvijao premda bi time dobili relativno neprecizne rezultate.

4. ANALIZA REZULTATA PRETRAGE

Može se lako provjeriti da dobiveni broj π, kao jedna od nultočki, upravo odgovara onome koji je memoriran u stalnoj memoriji računala. Funkcija koju smo do sada promatrali predstavlja prigušenu sinusoidu (slika 3), a os opscisa siječe u istim točkama kao i funkcija sin$x$, tako da u intervalu [0, 7] ima slijedeće nultočke: 0, π, 2π.

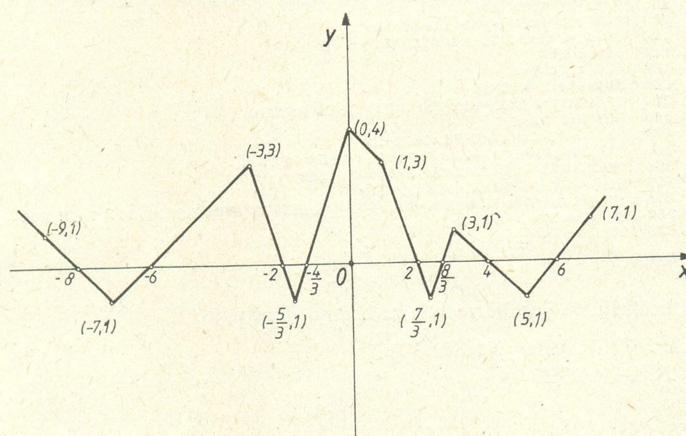


Sl. 3.

Budući da smo ispitali rad programa možemo sada pristupiti i rješavanju »zamršenijih« funkcija, kao npr.

F (X) = ABS (ABS (X − 1) − 2 * ABS (ABS (X) − 3)) − 1

čiji je graf prikazan na slici 4.



Sl. 4.

Vidimo da ovaj graf u intervalu [−9, 7] siječe x-os 8 puta, te ako ju definiramo unutar našega programa dobivamo uz korak FI = 0.1 slijedeće rezultate:

REZULTAT	TIME$	GREŠKA (%)	NULTOČKA
-8	0001	0	-8
-6	0004	0	-6
-2	0010	0	-2
-1.33333333	0012	ZAOKRUŽENO	-4/3
2	0015	0	2
2.66666667	0017	ZAOKRUŽENO	8/3
4.00000012	0022	+0.000003	4
6.00000024	0028	+0.000004	6

Ovdje primjećujemo da su rezultati u relativno kratkom vremenu izašli relativno precizni dok su dvije točke dobro zaokružene, dvije imaju relativno vrlo malu grešku, a četiri su 100% točne.

5. ZAKLJUČAK

Predstavljeni program očito omogućuje brzo i vrlo efikasno pronalaženje nultočaka funkcije, za koje su uobičajene metode katkad potpuno neprimjenjive. Ipak, treba naglastiti da i ovaj program predstavlja samo jednu pomoćnu metodu, koja uz primjenu drugih načina u analizi funkcije daje rezultate. Računalo bi trebalo naći, a i sve više nalazi, svoju primjenu u matematici. Ono je, jednostavno rečeno, osnovna alatka budućih matematičara.

Na kraju, valja još napomenuti da se ovaj program uz vrlo male prilagodbe može primijeniti i na drugim tipovima malih računala.

Listing program u cijelosti:

```
10  INPUT"FUNKCIJA F(X)=";F$
20  PRINT CHR$(147): PRINT "40 DEFFNF(X)=";F$: PRINT "GOTO 40"
30  POKE 631,19:POKE 632,13:POKE 633,13:POKE 634,13:POKE 198,4: END
40  REM *** OVU PROGRAMSKU LINIJU DEFINIRA RACUNALO ***
50  PRINT CHR$(147):K=1: DIM X(99): FOR N=0 TO 99 :X(N)=919: NEXT N
60  INPUT "GRANICE INTERVALA X1,X2 ";X1,X2
70  INPUT "FINOCA PRETRAGE ";FI
80  IF X1=X2 THEN 60
90  IF X1>X2 THEN K=X1:X1=X2:X2=K
100 FOR X = X1+FI TO X2 STEP FI
110  GOSUB 200
120 NEXT X: END
200  X0=X-FI:Z=X:E=10
210  IF SGN(FNF(X))=SGN(FNF(X0)) THEN RETURN
220  FORN=1TOE
230   Y0=Z-FI/E*N:Y=Z-FI/E*(N-1)
240   IF SGN(FNF(Y))=SGN(FNF(Y0)) THEN NEXT N
250  IF E<1E09 THEN E=E*10:Z=Y:GOTO 220
260  X(K)=INT((Y+Y0)/2*1E09)/1E09
270  IF VAL(LEFT$(STR$(X(K-1)),9))=VAL(LEFT$(STR$(X(K)),9)) THEN 290
280  PRINT X(K) : K=K+1
290 RETURN

READY.
```

»Hladna« fuzija — san ili energetska budućnost?

ALAN PAIĆ, student, Zagreb

U procvatu zanimanja javnosti za budućnost čovjekove okoline, a naravno bez odustajanja od svih blagodati suvremene civilizacije, nastala je potraga za takozvanom »čistom« energijom. Nalaženje takvog izvora energije riješilo bi današnju nemoguću dilemu: nastaviti proizvoditi sve više »prljave« energije i dokraja uništiti okoliš, ili naglo smanjiti proizvodnju energije te se vratiti u civilizacijski Srednji vijek? Jer, sve na što smo navikli ima svoju energetsku cijenu: zgrada vaše škole »košta« nekoliko stotina tona nafte, a za kilogram papira na kojem se tiska Matematičko-fizički list treba pola kilograma tog »crnog zlata«.

Apsolutno čistog izvora energije nema. Naime, kada bolje razmizlimo i o široko pozdravljenoj Sunčevoj energiji, moramo se zamisliti nad brojem rudarskih nesreća koje se moraju dogoditi da bi se osigurao metal za izgradnju solarne elektrane.

Jedan od najčišćih izvora energije svakako je nuklearna fuzija. Fuziona elektrana bi kao otpad davala bezopasan a koristan plin helij, za razliku od današnjih, fisionih nuklearnih elektrana koje proizvode visokoaktivne radionuklide.

Na kojem principu radi fisioni, a na kojem fuzioni reaktor? Fisija je cijepanje teških atomskih jezgara u manje fragmente pri čemu vrijedi da je zbroj masa nastalih fragmenata manji od mase polazne jezgre. Razlika početne i konačne mase pretvorit će se u kinetičku energiju fragmenata prema čuvenoj Einsteinovoj relaciji $E = m c^2$. Ta se kinetička energija makroskopski manifestira kao toplina koju mi koristimo za dobivanje električne energije. Fuzija je pak obratan proces. Ona predstavlja spajanje jezgara lakih elemenata pri čemu je masa novonastale jezgre manja od zbroja masa polaznih jezgara, te se ponovo ta razlika mase pretvori u toplinu.

Zašto je čovjek već odavna ovladao fisijom, a fuzijom ne? Prisjetimo se malo građe atomske jezgre. Ona se sastoji od protona i neutrona. Dok ih na okupu drži jaka nuklearna sila, jezgra je stabilna. Da nije nje, električno odbijanje među protonima učinilo bi da se oni »raštrkaju« svaki na svoju stranu. No, budući je jaka sila vrlo kratkog dometa, dovoljno je jezgru malo »kvrcnuti« da se dva njena dijela malo razdvoje, »ljepilo« jake sile popusti i jezgra se cijepa. Neutroni koji se »odlijepe« od jezgre usporavaju se, pa zatim oni »kvrcnu« slijedeću jezgru i tako se razvija lančana fisija. Nju je lako potaći: pri kritičnoj masi fisibilnih radioaktivnih jezgara ona počinje spontano.

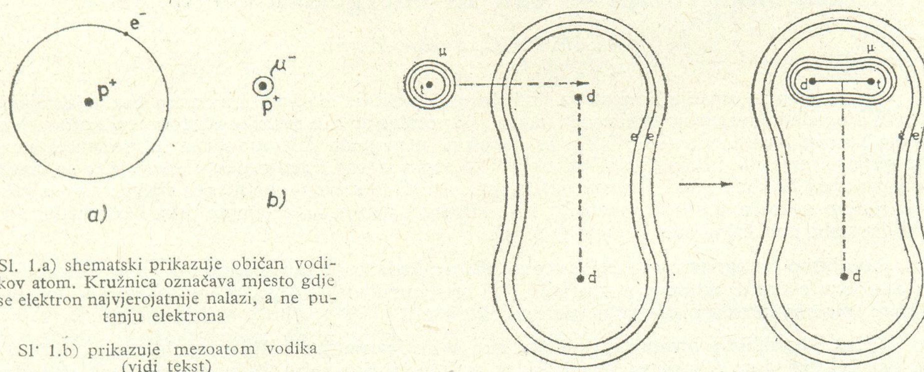
Da bismo, međutim, spojili dvije jezgre npr. vodika, moramo postići da se one kreću toliko brzo da uspiju savladati električno odbijanje među sobom i doći dovoljno blizu jedna drugoj da ih jaka nuklearna sila »zalijepi«. Da bi se postigle tolike brzine, potrebne su temperature slične onima u unutrašnjosti Sunca, tj. oko 100 milijuna stupnjeva (Kelvina ili Celzijusa, sada je svejedno). Znamo, naime, da je ono što mi zovemo temperatura ustvari posljedica nasumičnog gibanja atoma i molekula, te da je ona proporcionalna srednjem kvadratu te nasumične brzine. Pri takvoj temperaturi i tlak je vrlo velik, pa je jasno da takve uvjete nije lako postići, a još manje kontrolirati. Nekontrolirana fuzija postiže se u eksploziji termonuklearne (tzv. hidrogenske) bombe. Najveći je problem kako iz fuzije izvući više energije nego što smo uložili u grijanje plazme. [Plazma je oblik plinovitog stanja materije koji se postiže pri vrlo visokim temperaturama, a gdje su svi atomi potpuno ionizirani, što znači da elektroni više nisu u svojim orbitalama oko jezgara, već se slobodno kreću, dok su jezgre sasvim »ogoljene«.] Istraživanja su pokazala da je to teoretski moguće samo u golemim postrojenjima koja su strahovito skupa, a to bi bila prava minijaturna Sunca koja bi pri nepravilnom rukovanju mogla prouzrokovati havarije.

Sada je jasno zašto je vrlo veliko zanimanje pobudila mogućnost hladne fuzije u kojoj se spajanje jezgara, umjesto temperaturom, postiže katalizatorom, takozvanim teškim elektronom. Radi se o mionu (μ), čestici iz porodice leptona u koju pripadaju još i elektron, tauon i neutrino, a zajednička im je osobina da »osjećaju« samo slabu nuklearnu silu (za razliku od protona i neutrona koji međudjeluju isključivo jakom nuklearnom silom). Mion je 207 puta teži od elektrona, i nestabilan je: u roku od 2,2 mikrosekunde raspada se na elektron i dva neutrina. Ostala su mu sva svojstva ista kao i elektronu, što omogućuje da on zamijeni elektron u ljusci vodikova atoma.

Heisenbergov princip neodređenosti, kaže da je umnožak točnosti kojom se teoretski, dakle s najboljim zamislivim mjernim uređajem može odrediti položaj čestice i njena količina gibanja veći, odnosno približno jednak Planckovoj konstanti:

$$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim h, \; h = 6{,}626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}.$$

U kvantnoj mehanici se pomoću ove relacije može odrediti prostor na kojem se nalazi elektron, tj. promjer atoma Δx. Povećamo li sada masu elektrona 207 puta, povećat će mu se i količina gibanja Δp 207 puta, što znači da se Δx mora 207 puta smanjiti a da bi umnožak $\Delta x \cdot \Delta p$ ostao isti (sl. 1).



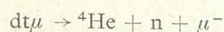
Sl. 1.a) shematski prikazuje običan vodikov atom. Kružnica označava mjesto gdje se elektron najvjerojatnije nalazi, a ne putanju elektrona

Sl. 1.b) prikazuje mezoatom vodika (vidi tekst)

Sl. 2. Lijevo: mezoatom tricija koji nalijeće na molekulu deuterija; desno: složena mezomolekula [(dt (μ) dee]*

Zamijenimo li, dakle, elektron u atomu mionom, atom se smanjuje, te budući da negativan mion uravnotežuje pozitivan naboj protona, atom ustvari liči na oveći neutron. Takav atom zovemo mezoatom. Jezgre dva mezoatoma moći će doći puno bliže jedna drugoj (dok ne »shvate« da se moraju odbijati) nego što je to slučaj kod običnih, elektronskih agoma. Tako smo smanjili potrebnu brzinu atoma, dakle i temperaturu. Međutim, to ipak ne bi snizilo potrebnu temperaturu na neku relativno razumnu, koja se lako postiže i kontrolira.

Promotrimo situaciju kao na sl. 2. Mezoatom tricija (t) (izotopa vodika s dva neutrona) nalijeće na molekulu deuterija (d) (izotopa vodika s jednim neutronom). Tricij se ponaša kao veliki neutron i nesmetano dolazi u blizinu jedne od jezgara deuterija, te s njome tvori mezomolekulu $dt\mu$ unutar same deuterijeve molekule. Na taj način nastaje složena mezomolekula $[(dt\mu)dee]^*$, gdje * označava da se radi o pobuđenom stanju molekule. To znači da molekula nije stabilna, već je pobuđena na titranje, a to titranje daje jezgrama puno veću brzinu od one koju imaju od termičkog, nasumičnog gibanja. Preciznije govoreći, ovaj proces simulira temperaturu od 3 milijuna stupnjeva i gustoću 10 milijuna puta veću od gustoće tekućeg vodika. Tako je na ovaj način opažena fuzija:



$$dt\mu \rightarrow {}^4He + n + \mu^-$$

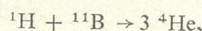
i to na temperaturama od 25 Kelvina (−268° Celzijusa) naviše! Radi se dakle doista o hladnoj fuziji. Međutim, to je naravno samo jedna strana medalje. S druge strane pak treba uzeti u obzir da se može dogoditi da se mion »zalijepi« na helijev atom, tj. da ostane vezan uz jezgru helija te bude izgubljen za dalji tok reakcije. Naime, proizvodnja miona (kojih u prirodi nema) ima također svoju energetsku cijenu od 2,5—5 GeV (1 GeV = 1 gigaelektronvolt, tj. energija koju bi dobio jedan elektron koji bi bio ubrzan naponom od milijardu volti, a to odgovara energiji od $1{,}6 \cdot 10^{-10}$ J). Fuzija nam, međutim, daje svega 17,6 MeV energije, dakle 200—300 puta manje nego smo uložili. To znači da bismo morali postići da nam jedan jedini mion u toku svog kratkog života od 2,2 mikrosekunde katalizira 200—300 fuzija pa da povratimo uloženu energiju. To bi bilo moguće da nije gore spomenutog »lijepljenja« na helijev atom. Naime, teoretičari tvrde da se gore opisani proces zbiva u vremenu od oko 5 nanosekundi ($5 \cdot 10^{-2}$ s). Međutim, vjerojatnost lijepljenja od 1% sasvim kvari tu računicu. Uvjerite se i sami: ako je vjerojatnost da će mion ostati aktivan nakon jedne fuzije 0,99, onda je vjerojatnost nakon dvije fuzije $0{,}99^2$ i tako dalje. Vjerojatnost nakon 50 ili 200 fuzija izračunajte sami na kalkulatoru.

Prema jednoj studiji, da bismo povratili energiju direktno uloženu u proizvodnju miona, bez uračunavanja bilo kakvih gubitaka, treba nam 285 fuzija po mionu. Ako u to uračunamo gubitke koji nastaju pri proizvodnji miona, kao i one koji nastaju pri pretvorbi toplinske energije u električnu i niz drugih, ispada da nam treba 1100 fuzija po mionu da bismo povratili uloženu električnu energiju. Ako sada zahtijevamo da mi od te elektrane još neku struju dobijemo i za gladne potrošače, taj broj i dalje raste, a za ekonomski isplativu elektranu doseže nemoguću vrijednost od 3850 fuzija po mionu. Postoji naravno uvijek nada da će napredak tehnologije smanjiti ove zahtjeve, ali čak i najoptimističnija predviđanja ove studije ne silaze ispod 361 fuzije po mionu za kompenzaciju električne energije i 1100 za ekonomsku isplativost.

Pitanje koje se sada postavlja je: koliko je uopće moguće postići reakcija s jednim mionom? Davne 1957. godine ljudi su bili digli ruke od mionske fuzije jer je tadašnje teoretsko znanje predviđalo maksimum od oko 100 fuzija po mionu. Današnje shvaćanje dopušta mogućnost od više od 200 fuzija po mionu. Pokusi su do danas dali maksimum od 200—240 fuzija po mionu.

Jedan od najvećih problema postavlja spomenuto lijepljenje miona na helijeve atome. Postoje pokušaji da se oni odlijepe pomoću jakih električnih i magnetskih polja visoke frekvencije. Postoje i proračuni koji računaju na iskorištenje energije neutrona koji bi se zaustavljali posebnim omotačima i davali toplinu. Drugi pak žele stvoriti tzv. mezokatalitički hibridni reaktor koji bi imao omotač od prirodnog urana 238 na kojem bi se vršio uhvat neutrona te bi na taj način nastao plutonij 239 a ovaj bi se dalje koristio kao gorivo za fisioni reaktor. Time smo izgubili na čistoći ali smo dobili na izvedivosti cijele zamisli, jer se gore spomenute optimistične brojke spuštaju na svega 90 potrebnih fuzija po mionu za ekonomsku isplativost. Međutim, to nam vraća stari problem sa visokoaktivnim otpadom kojega smo se htjeli riješiti.

Na kraju spomenimo postojanje još jednog oblika hladne fuzije koji bi s ekološkog stanovišta bio zaista idealan. Radi se o fuziji vodika i bora:



$${}^1H + {}^{11}B \rightarrow 3\ {}^4He,$$

koja se također može postići na hladno, formacijom mezomolekule $HB\mu$. Vidimo da ova reakcija izbjegava proizvodnju neutrona koji predstavljaju oblik radioaktivnog zagađenja, dok je helij, kao što smo već spomenuli, sasvim bezazlen. Neki u ovome vide energiju budućnosti, međutim ova je reakcija još manje istražena nego deuterij-tricij fuzija i zasad je još mnogo dalje od mogućnosti upotrebe nego ista.

Zaključimo da je budućnost hladne fuzije danas još neizvjesna, mada bi ona zasigurno predstavljala rješenje današnje energetske krize. Dovoljno je spomenuti da vodik čini 71% materije u svemiru, što znači da goriva ne bi nikad ponestalo. S druge strane ona eliminira potrebu za ogromnim, vrućim postrojenjima koja unatoč i najvećim mjerama predostrožnosti većini javnosti ulijeva strah od mogućnosti nuklearne eksplozije. S druge strane pak, treba uzeti u obzir činjenicu da se radi o relativno novom otkriću, te valja vjerovati u mogućnost prevladavanja svih prepreka širokoj primjeni hladne fuzije.

IZ MOJE RADIONICE I LABORATORIJA

Kako hladiti motor automobila?

Na cesti katkad susrećemo auto kojem ispod poklopca motora izlazi para.

Znači, motor se pregrijao, vožnja se prekida a motor gasi da se ne bi oštetio.

Kao što znate - auto pokreće niz eksplozija benzinskih para pomiješanih sa zrakom u motoru. Uslijed tog temperatura motora raste. Da bi temperaturu motora održavali stalnom motor valja hladiti.

Ispitajmo pokusom kako to uspješno činiti!

1. Umjesto stubline motora uzmite staklenu povišu čašu s vrućom vodom. Ovu čašu stavimo u posudu s hladnom vodom tako da uranja gotovo do ruba. Pomoću jednog termometra mjerite temperaturu vruće a drugim hladne vode. U razmacima od 5 minuta otčitavajte temperature vruće i hladne vode tijekom pola sata.

Podatke koje dobijete mjerenjem temperatura i proteklog vremena unesite u koordinatni sustav. Na apscisnu os nanosite vrijeme a na ordinatnu os odgovarajuće vrijednosti temperature vruće vode crvenom a hladne plavom olovkom. Potom nacrtajte pripadne grafove promjene temperature vruće i hladnije vode.

— U kojem smjeru prelazi toplina?
— Što vam kazuje nagib jednog i drugog grafa?
— Da li se ti grafovi sijeku? Ako da, što to znači?
— U kojem slučaju prestaje prelaziti toplina?
— Da li se na ovaj način motor može stalno hladiti?
— Što činiti da hlađenje bude što bolje?

2. Ponovite istraživanje tako da čašu s vrućom vodom do ruba uronite u posudu s većom količinom hladne vode no što je bila ranija. Opet mjerite temperature vruće i hladne vode u vremenskim razmacima od 5 minuta. Potom nacrtajte odgovarajuće grafove i usporedite ih s ranije dobivenim.

— Što kazuje ova analiza? Kad je hlađenje uspješnije?

3. Izvedite i treće mjerenje ali sada tako da kroz posudu koja predstavlja hladionik puštate da voda iz vodovoda stalno kroz nju protječe.

— Kako ovaj zahvat utječe na »hlađenje motora«?
— Da li znate kako se održava potrebna stalnost temperature hlađenja automobilskog motora?

dr. Gustav Šindler

ASTRONOMIJA

Ima li u svemiru još nekoja zvijezda planete?

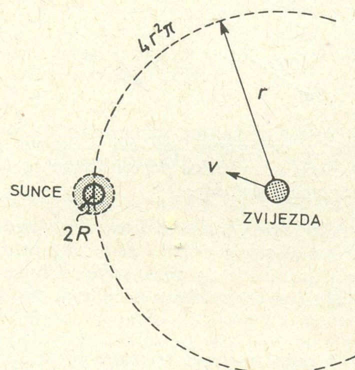
Usprkos velikom napretku astronomskih instrumenata, do današnjeg dana nije ugledan još ni jedan planet u drugih zvijezda. Najdalje su stigla ispitivanja u infracrvenom području zračenja, koja su u nekih bliskih zvijezda otkrila postojanje barem oblaka prašine, ako ne i prisustvo hladnih krutih tijela planetskih dimenzija. Sitne krute čestice, meduzvjezdana prašina, a također i planeti, zrače infracrveno.

O tome da li postoje i drugi planeti ili ne postoje, da li su česta svemirska pojava ili rijetka ovisi spoznaja o nastanku našeg planetskog sustava. Ima li mnogo planetskih sustava, tada su im uvjeti nastanka zasigurno drukčiji nego u slučaju kada ih ima jako malo.

Jedna od teorija postanka planeta onemogućena je ukoliko u Mliječnom Putu postoji više planetskih sustava. To je teorija koju je postavio *J. Jeans* 1917. god. Teorija ulazi u red katastrofnih teorija i predviđa bliski susret dviju zvijezda: Sunca i još jedne zvijezde. Druga zvijezda mora proći tik Sunca, pri čemu zbog djelovanja privlačne sile, na Suncu se javlja plimni val koji se odvaja od Sunca i oblikuje veliki plinski mlaz. Mlaz plina, odvojivši se od Sunca nastavlja oko njega obila-

ziti, ali se raspada u sitnije dijelove — satelite i planete.

Razmotrimo pretpostavku tijesnog sudara. Da li do takvog susreta često dolazi u svijetu zvijezda? Odgovor ovisi o tome kako su zvijezde raspoređene i kojim se brzinama gibaju. Ako su zvijezde zbijenije i ako se gibaju brže, češće će doći do bliskih susreta. Prema dimenzijama Mliječnog Puta i broju zvijezda u njemu, procjenjuje se da su zvijezde u prosjeku razmaknute za 3gs (godine svjetlosti). Pođimo od tog podatka. Opišimo oko zvijezde sferu polumjera $r = 3$ gs, a oko Sunca površinu koja ima dva puta veći polumjer od Sunčeva polumjera R (v. sliku). Pretpostavljamo da su zvijezda i Sunce jednakih polumjera, pa kada se razmak centara tih dviju zvijezda nađe u području površine opisane oko Sunca, sigurno dolazi do sudara s potrebnim posljedicama. Dakle, površina $(2R)^2 \pi$ je *povoljna* u pogledu sudara.



No da li će zvijezda krenuti baš u takvom smjeru da pogodi površinu opisanu oko Sunca? Zvijezda ima »slobodu biranja« i može udariti u čitavu površinu sfere opisane oko nje, a na udaljenosti r — dakle ona može da prođe bilo gdje kroz površinu veličine $4r^2 \pi$. Kako je od te *moguće* površine samo mali dio površina u kojoj se zbiva sudar, to je vjerojatnost sudara jednaka omjeru povoljne i moguće površine:

$$4R^2\pi : 4r^2\pi = 5{,}4 \cdot 10^{-16}.$$

(U računu smo uzeli približnu jednakost: 1 gs = 10^{13} km, te polumjer Sunca $R = 7 \cdot 10^5$ km).

To je veoma malena šansa. Ta šansa postoji u vremenu koje je jednako vremenu gibanja zvijezda brzinom v na putu r; za brzinu zvijezda uzmimo prosječnu brzinu zvijezda u Galaktici $v = 100$ km/s, pa dobivamo:

$$t = r/v = 3 \cdot 10^{11}\ \text{s} = 10^4\ \text{god.}$$

Dobiveni rezultati znače da Sunce i još jedna zvijezda imaju šansu bliskog susreta $1 : 0{,}2 \cdot 10^{16}$ u vrijeme od 10 000 godina. Onoliko zvijezda, 900 milijardi, koliko se nalazi u Mliječnom Putu imaju toliko puta veću šansu. U Mliječnom Putu koji sadrži 900 milijardi zvijezda šansa je za toliko puta veća u istom tom vremenu, a u vremenu od 10 milijardi godina, šansa se povećava za omjer vremenskih intervala. Dakle ukupna šansa za cijeli Mliječni Put u vremenu njegova postojanja iznosi

$$9 \cdot 10^{11} \cdot 10^{10}\ \text{god}/10^4\ \text{god} = 9 \cdot 10^{17}$$

puta više od šanse koju imaju dvije zvijezde u 10^4 god. Konačan je rezultat

18 povoljnih događaja.

U cijelom Mliječnom Putu ne bi dakle smjelo biti više od desetak planetskih sustava. Osnovni dio Mliječnog Puta zamišljamo u obliku diska ili plosnatog valjka čija je visina 4 000 gs a polumjer 40 000 gs. Gdje da nađemo upravo te planetske sustave? Očito je da bi oni bili raspoređeni veoma rijetko. Prema opažačkim indicijama u našem bližem susjedstvu mogu postojati sustavi hladnih zvjezdanih pratilaca, a također i suvremene teorije o postanku zvijezda predviđaju da nakon formiranja zvijezda ostaje dovoljno hladnog materijala ih kojeg su mogu formirati i planeti. Stoga Jeansova teorija o sudarnom porijeklu Sunčeva sustava gubi oslonac.

Za neovisan zadatak, izračunajmo prosječan razmak između zvijezda Mliječnog Puta na osnovi njegovih dimenzija i broja zvijezda. Zamislimo da na svaku zvijezdu otpada dio volumena oblika kocke. Brid je kocke tada jednak prosječnom razmaku dviju zvijezda.

Vladis Vujnović

ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija je, iz tehničkih razloga, primorana objaviti slijedeće UPOZORENJE:

Krajnji **rok** za primanje rješenja (A, B, C) iz ovog broja je **20. 12. 1987.** Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 3/154. Bit će objavljena imena samo onih učenika koji riješe *minimum* zadataka: 5-M ili 3-F (ili oboje) ako polaze 3. ili 4. razred, 3-M ili 2-F (ili oboje) ako polaze 1. ili 2. razred.

Ujedno molimo pripaziti na upute rješavateljima koje su na dnu četvrte strane omota.

* Zadaci označeni zvjezdicom predviđeni su prvenstveno za 15—16-godišnje učenike.

A) Zadaci iz matematike

1979*. Zadana su dva razlomka:

$$\frac{2222221}{2222223} \text{ i } \frac{3333331}{3333334}.$$

Koji je razlomak veći?

1980. Rastaviti 100! (100 faktorijela) na proste faktore.

1981*. Riješiti jednadžbu

$$x^2 + 4y^2 = 4567$$

u skupu cijelih brojeva.

1982. Duljine stranica trokuta su rješenja jednadžbe

$$x^3 - 42x^2 + 587x - 2730 = 0.$$

Ne rješavajući jednadžbu naći površinu tog trokuta.

1983. Naći realna rješenja jednadžbe

$$x^4 - 4x = 1,$$

zaokruženo na dvije decimale.

1984. Zadan je niz

$$1, 1, 2, 3, 7, 22, \ldots$$

u kojem je svaki član (počevši od trećeg) jednak produktu prethodnih dvaju članova uvećanom za 1.

Dokazati da nijedan član niza nije djeljiv sa 4.

1985. Naći najmanji član niza s općim članom

$$a_n = n + 5 \sin \frac{n\pi}{2}.$$

1986*. Da li postoji trokut sa stranicama $a = 7$, $b = 2$ kojemu je visina na treću stranicu (h_c) jednaka geometrijskoj sredini ostalih dviju visina?

1987*. Vrhom A konveksnog četverokuta $ABCD$ povući pravac tako da površina četverokuta bude raspolovljena.

1988*. Naći duljine stranica jednakokračnog trokuta čiji je radijus upisane kružnice $r = 3$, a radijus opisane kružnice $R = 8$.

1989. Dokazati (tj. izvesti bez tablica i bez kompjutora)

$$\text{tg } 20° \cdot \text{tg } 40° \cdot \text{tg } 60° \cdot \text{tg } 80° = 3.$$

1990. U ormaru se nalazi 10 različitih pari cipela. Izvadimo nasumce 4 cipele. Kolika je vjerojatnost da će se između tih izvađenih cipela nalaziti bar jedan par iste vrste?

1991. U jednakokračnom trokutu je baza $\overline{BC} = 32$ cm, krak $\overline{AB} = 20$ cm. Vrhom A nacrtajte okomicu na krak $\overline{AC}$. Ta okomica siječe bazu u točki D. U kojem omjeru točka D dijeli bazu?

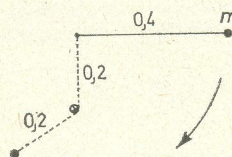
1992. Neka je p bilo koji pravac kroz fokus F parabole $y^2 = 2px$, a S_1 i S_2 sjecišta pravca p s parabolom. Dokazati da je broj

$$\frac{1}{d(F, S_1)} + \frac{1}{d(F, S_2)}$$

konstantan za tu parabolu.

B) Zadaci iz fizike

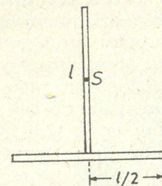
833. *Na niti duljine* $l = 0{,}4$ m *obješena je kuglica mase* $m = 0{,}02$ kg. *Zapreka je postavljena* 0,2 m *ispod objesišta. Tijelo je u početku*



otklonjeno u vodoravni položaj i zatim pušteno. Do koje će se visine popeti nakon prolaska kroz ravnotežni položaj?

834. *Niz jednu kosinu s iste visine puste se kotrljati bez klizanja prsten i disk istog polumjera i iste mase. Koje će tijelo prije stići na dno kosine? Naći omjer vremena kotrljanja tijela niz kosinu.*

835. *Odrediti moment tromosti tijela sastavljenog od 2 jednaka štapa, svaki duljine* $l = 2$m, *mase* $m = 3$ kg *s obzirom na os koja prolazi težištem i okomita je na ravninu određenu štapovima.*



Naći frekvenciju njihanja za otklone oko osi koja prolazi sredinom (S) vertikalnog štapa a okomita je na ravninu određenu štapovima.

836. *Tijelo težine* $G = 200$ N *giba se uz kosinu nagiba* $\alpha = 30°$ *prema horizontalnoj ravnini duž puta dugačkog* $l = 2$m, *a pod utjecajem stalne sile* $F = 150$ N, *koja djeluje u vodoravnom smjeru. Izračunati rad sile* F *i rad težine tijela. Uz pretpostavku da se tijelo giba jednoliko, izračunati silu trenja i njezin rad.*

837. *Na pravokutni otvor dimenzija* 0,2 × × 0,3 mm² *upada pod pravim kutom svjetlost He-Ne lasera* ($\lambda = 0{,}6328\ \mu m$). *Nacrtaj interferentnu sliku na zaslonu koji je paralelan otvoru i udaljen od njega* 4m.

838. *Starost organskih predmeta određuje se prateći raspad ugljika* C^{14} *u* C^{12}. *Mjeri se radioaktivnost ugljika dobivenog iz uzorka I i iste količine danas živuće materije* I_0. *Starost uzorka se računa iz poznatog vremena poluživota* C^{14}, $T_{1/2} = 5568$ *god. uz pretpostavku da je radioaktivnost ugljika iz uzorka u trenutku smrti živog bića bila jednaka* I_0, *onoj iz današnje materije.*

a) Koja je najveća starost datiranja, ako je najmanji signal koji mjerni instrument može detektirati $I_{min} = 10^{24} \cdot I_0$?

b) Koja je najmanja pogreška datiranja, ako je pri mjerenju omjera I/I_0 *minimalna pogreška* 2,5%?

839. *Na četiri šiljka koji tvore proizvoljni četverokut stranica a, b, c i d, postavljena je kvadratna ploča mnogo većih dimenzija, tako da ploča djeluje na svaki od šiljka jednakom silom. Ploča se nalazi u horizontalnoj ravnini. Odrediti iznad kojeg se mjesta unutar četverokuta nalazi težište ploče!*

C) Zadaci iz matematike za ekonomsko usmjerenje

676. *Podignut je zajam od* 2 000 000 *dinara na* 16 *godina uz* 20% *godišnje dekurzivno po složenom kamatnom računu. Poslije* 8 *godina otplaćivanja kamatnjak se poveća na* 60% *godišnje dekurzivno. Ostali uvjeti otplaćivanja zajma se ne mijenjaju. Izračunajte sa koliko % novi mjesečni anuitet opterećuje dužniku OD koji iznosi* 200 000 *dinara mjesečno. Mjesečni anuitet se izračunava tako da se godišnji anuitet podijeli sa* 12.

677. *Maksimizirajte* $z = x + y$ *uz uvjet* $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + 3y \leqslant 12,\ 3x + 2y \leqslant 15$. *Zadatak riješite grafički.*

678. *Odredite x i y koji zadovoljavaju ovu matričnu jednadžbu:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2x \\ 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -17 \end{bmatrix}.$$

679. *Roba je najprije poskupila za* 50%, *a zatim pojeftinila za* 50% *i na kraju je stajala* 3 000 *dinara. Kolika je bila početna cijena te robe?*

680. *Treba poredati jednu pored druge a)* 3 *različite knjige iz matematike i* 4 *različite knjige iz statistike, b)* 3 *jednake knjige iz matematike i* 4 *jednake knjige iz statistike. Kolika je vjerojatnost u slučaju a) a kolika u slučaju b) da budu jedan pored druge sve knjige iz matematike i sve knjige iz statistike?*

D) Rješenja iz matematike

1951. *Naći dva trocifrena broja takva da se u (dekadskom) zapisu njihovog produkta koristi samo cifra* 7.

Rješenje **A**: Produkt dvaju trocifrenih brojeva nalazi se u intervalu [10 000 = 100 · 100, 999 · 999 = 998001] U tom intervalu postoje dva broja čiji je dekadski zapis sačinjen samo cifrana 7.

To su: 77 777 i 777 777.

Da bismo našli dva tražena broja moramo rastaviti navedene brojeve na proste faktore:

$$777\,777 = 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$$

Od dobivenih prostih faktora nije moguće sastaviti dva trocifrena broja.

Rastavljanjem drugog broja dobivamo:

$$77\,777 = 7 \cdot 11\,111 = 7 \cdot 41 \cdot 271 = 287 \cdot 271.$$

Stoga je jedina mogućnost par (271, 287)

Nada Maroević (1), Split

Rješenje **B**:

Na analogan način zaključujemo da produkt može biti 77777 ili 777777 BASIC programom

```
10 FOR A = 100 TO 999
20 IF 77777/A = INT (77777/A) AND
77777/A < 1000 THEN PRINT A, 77777/A
30 IF 777777/A = INT (777777/A) AND
777777/A < 1000 THEN PRINT A,
777777/A
40 NEXT A
```

Dobivamo (nakon 36 s) slijedeća rješenja:

271 287

287 271.

Dalibor Tužinski (2), Slav. Požega

1952. *Определи го најмалиот природен број чија половина е полн квадрат, третина потполн куб, а петината е полн петти степен.*

Бараниот број мора да го има обликот $n = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$. (Ако има и други множители нема да биде најмал.) Од условот на задачата имаме:

$$\frac{n}{2} = 2^{x-1} \cdot 3^y \cdot 5^z \qquad (1)$$

$$\frac{n}{3} = 2^x\, 3^{y-1} \cdot 5^z \qquad (2)$$

$$\frac{n}{5} = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^{z-1} \qquad (3)$$

Од (1) следи дека $x-1, y, z$ мора да се парни.

Од (2) следи дека $x, y-1, z$, мора да се деливи со 3.

Од (3) следи дека $x, y, z-1$; мора да се деливи со 5.

Значи x е непарен делив со 3 и 5, y е делив со 2 и 5, z е делив со 2 и 3. Бидејќи n е најмал, тогаж и x, y, z мора да се најмали, а тоа се

$$x = 15, \quad y = 10, \quad z = 6.$$

$$n = 2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^{6} = 30\,233\,088\,000\,000.$$

Љупчоо Атанасов (ОУ), Кавадарци

1953. *U nekom razredu bilo je ukupno* 200 *učenika i to* 33 *dječaka i* 101 *djevojčica. Kako je to moguće?*

Rješenje **A**:

Neka je to moguće u brojevnom sistemu sa bazom n:

$$200_{(n)} = 33_{(n)} + 101_{(n)}$$

$$2n^2 = 3n + 3 + n^2 + 1$$

$$n^2 - 3n - 4 = 0 \text{ daje } n = 4.$$

Tada prevod na dekadski zapis glasi:

$$200_{(4)} = 4^0 \cdot 0 + 4^1 \cdot 0 + 4^2 \cdot 2 = 32_{(10)}$$

$$33_{(4)} = 4^0 \cdot 3 + 4^1 \cdot 3 = 15_{(10)}$$

$$101_{(4)} = 4^0 \cdot 1 + 4^1 \cdot 0 + 4^2 \cdot 1 = 17_{(10)}$$

Dakle, u tom razredu ima (u dekadskom zapisu) 15 dječaka i 17 djevojčica, odnosno ukupno 32 učenika.

Aleksandar Jocić (3), Foča
Josip Tambača (2), Šibenik

Rješenje **Š**:

200 − 101 = 99 što znači da je svaki dječak zatrudnio i nosi po dva blizanca. Zaista

$$101 + 33 + 2 \cdot 33 = 200.$$

Aleksandar Jocić (3), Foča

1954. *Naći najmanji prirodni broj n za koji se nijedan od razlomaka*

$$\frac{n+9}{7}, \frac{8}{n+10}, \ldots, \frac{31}{n+33}$$

ne može skratiti.

Rješenje **A**:

Jasno se vidi da su svi dati razlomci oblika $\frac{k}{k+(n+2)}$. Razlomci tog oblika se ne mogu skratiti samo ako su k i $n+2$ uzajamno prosti, tj. ako nemaju zajedničkih djelilaca. Znači da je $n+2$ uzajamno prost sa brojevima 7, 8, 9, ..., 31. Očito je $n+2 > 31$, pa je lako utvrditi da je najmanji prirodni broj sa traženim svojstvima 37. Dakle, $n+2 = 37$, pa je traženi broj $n = 35$.

Evelin Drinić (1), Banja Luka

Rješenje **B**:

Rješenje nalazimo pomoću slijedećeg BASIC programa koji pronalazi rješenje za 76 sekundi.

```
10 N = 1
20 FOR I = 7 TO 31
30 FOR J = 2 TO I
40 IF I/J = INT (I/J) AND (N + I + 2)/J
   = INT (N + I + 2)/J) THEN GOTO
   80
50 NEXT J
60 NEXT I
70 PRINT N : END
80 N = N + 1 : GOTO 20
```

Dalibor Tužinski (2), Slav. Požega

1955. *Neka su* $a, b, \in R$, $ab > 0$. *Izračunati modul* $|z|$ *kompleksnog broja*

$$z = \frac{\sqrt{a^2+b^2} + i\sqrt{2ab}}{a - b + 2i\sqrt{ab}}.$$

Znajući da je modul kvocijenta kompleksnih brojeva jednak kvocijentu modula brojnika i modula nazivnika imamo:

$$|z| = \left| \frac{\sqrt{a^2+b^2} + i\sqrt{2ab}}{a - b + 2i\sqrt{ab}} \right| =$$

$$= \frac{|\sqrt{a^2+b^2} + i\sqrt{2ab}|}{|a - b + 2i\sqrt{ab}|} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab}}{\sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab}} = .$$

$$= \frac{\sqrt{(a+b)^2}}{\sqrt{(a+b)^2}} = \frac{|a+b|}{|a+b|} = 1.$$

Kako je $ab > 0$ to je $a > 0, b > 0 \Rightarrow a + b > 0$;

ili

$$a < 0, \ b < 0 \Rightarrow a + b < 0$$

odnosno

$$a + b \neq 0, \ |a+b| \neq 0.$$

Kako nazivnik dobivenog razlomka nije 0 razlomak ima smisla i vrijednost mu je 1 odnosno $|z| = 1$.

Dalibor Tužinski (2), Slav. Požega

1956. *Reši enačbo*

$$(x+1)^2 + (2x+1)^2 + (3x+1)^2 + \dots + (99x+1)^2 = 99.$$

Najprej kvadriramo.

$$x^2 + 2x + 1 + (2x)^2 + 4x + 1 + (3x)^2 + 6x + 1 + \dots + (99x)^2 + 198x + 1 = 99.$$

Vidimo, da je na levi strani 99 členov 1.

$$x^2 + (2x)^2 + (3x)^2 + \dots + (99x(^2 + 2x + 4x + 6x + \dots + 198x = 0,$$

$$(1^2 + 2^2 + 2^2 + \dots + 99^2)\,x^2 + 2\,(1 + 2 + 3 + \dots + 99)\,x = 0.$$

Uporabimo pravili o vsoti prvih n števil in o vsoti kvadratov prvih n števil:

$$S_{(n)} = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$\text{in } S_{(n)} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{99 \cdot 100 \cdot 199}{6} \cdot x^2 + 2 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} \cdot x = 0$$

$$\frac{199}{6}x^2 + x = 0$$

$$x\left(\frac{199}{6}x + 1\right) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad \frac{199}{6}x + 1 = 0$$

$$199x = -6$$

$$x_2 = -\frac{6}{199}.$$

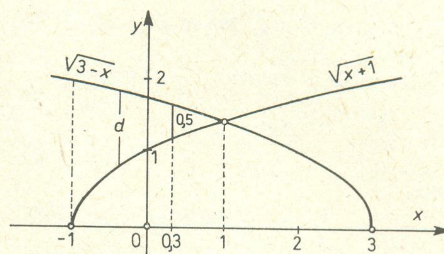
Mitja Šterman (3), Nova Gorica

Dragan Marić iz Kruševca i *Tarik Mehmedović* iz Tuzle su zadatak generalizirali. Za drugo rješenje su dobili $-6/(2n+1)$.

1957. *Riješiti (u skupu R) nejednadžbu*

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > 0{,}5.$$

Zbog $3 - x \geqslant 0$, $x \leqslant 3$ te $x + 1 \geqslant 0$, $x \geqslant -1$ mora vrijediti $-1 \leqslant x \leqslant 3$. Međutim, sa slike se razabire da će traženi x biti u intervalu $[-1, 1)$. Rješenja nejednadžbe su one vrijednosti x za koje je »udaljenost



između grafova« (razlika d ordinata) veća od 0,5. To znači da moramo najprije odrediti onaj x za koje će biti $d = 0{,}5$. Jednadžbu

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} = 0{,}5$$

rješavamo preko dva kvadriranja i dobivamo $64x^2 - 128x + 33 = 0$, pa zatim $x_1 = (8 - \sqrt{31})/8$, $x_2 = (8 + \sqrt{31})/8$. Rješenje x_2 otpada! Dakle $d = 0{,}5$ za $x = (8 - \sqrt{31})/8 \approx 0{,}304$. Rješenje zadatka je:

$$-1 \leqslant x < \frac{8 - \sqrt{31}}{8}.$$

Dijana Ilišević (1), Beli Manastir

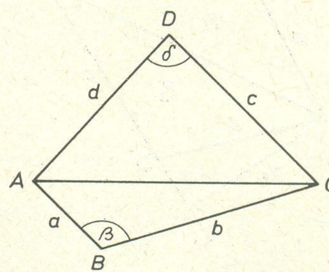
1958. *Duljine stranica konveksnog četverokuta su a, b, c i d. Dokazati da za površinu P četverokuta vrijedi*

$$P \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}.$$

Rješenje **A**:

Konveksan četvorougao $ABCD$ može se dijagonalom podeliti na dva trougla: ABC i ACD. Tada je

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD}$$



Kako je

$$P_{ABC} + \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\beta = \frac{2}{4}ab \cdot \sin\beta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2ab}{4} \leqslant \frac{a^2 + b^2}{4}$$

(zbog $0 \leqslant \sin\beta \leqslant 1$, $2ab \leqslant a^2 + b^2$) i

$$P_{ACD} = \frac{1}{2} cd \cdot \sin\delta = \frac{2}{4} cd \cdot \sin\delta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2cd}{4} \leqslant \frac{c^2 + d^2}{4}$$

sledi

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(ab \cdot \sin\beta + cd \cdot \sin\delta) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$$

što je trebalo dokazati.

Jednakost važi za $\beta = \delta = 90°$ i $a = b = c = d$, tj. kad je taj četverougao kvadrat.

Fatos Bunjaku (3), Titova Mitrovica

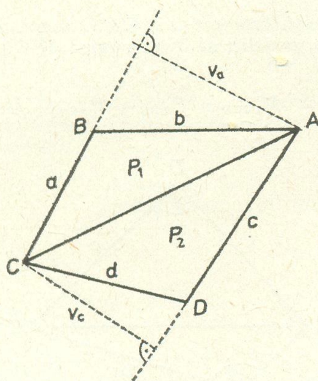
Rješenje **B**:

$$P_1 = \frac{a \cdot v_a}{2}, \quad P_2 = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

$$P_1 + P_2 = \frac{a \cdot v_a}{2} + \frac{c \cdot v_c}{2}$$

$$b \geqslant v_a, \; d \geqslant v_c$$

$$\left.\begin{aligned} P_1 &\leqslant \frac{a \cdot b}{2} \\ P_2 &\leqslant \frac{c \cdot d}{2} \end{aligned}\right\} +$$



$$P_1 + P_2 \leqslant \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c \cdot d}{2}$$

$$P \leqslant 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} + 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \geqslant 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2},$$

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \geqslant 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2}$$

$$P \leqslant \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$P \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$$

Vesna Laci (3), Varaždin

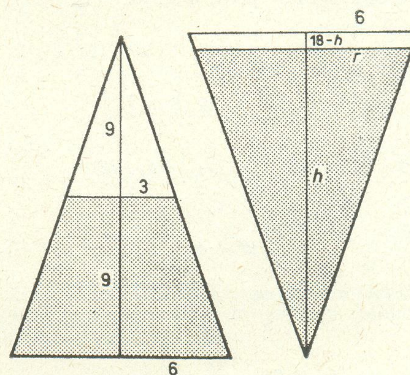
1959. *Polmer osnovne ploskve pokončnega stožca je 6 dm, višina pa 18 dm. V stožec je natočena voda, ki sega do polovice višine stožca. Do kam bi segala voda, če bi stožec obrnili na »glavo«?*

Izračunajmo volumen vode:

$$V = \frac{\pi \cdot 9}{3} \cdot (6^2 + 6 \cdot 3 + 3^2) = 189\,\pi.$$

(prisekami stožec).

To vodo pretočimo v našemu stožcu podoben stožec ($h = 3r$).



Do kam bo segala?

$$V = 189\,\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 3r$$

$$189 = r^3$$

$$r = \sqrt[3]{189} \text{ in } h = 3r = 3 \cdot \sqrt[3]{189} =$$

$$= 3 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{7} = 9 \cdot \sqrt[3]{7}.$$

Segla bo do višine $h \approx 17{,}22$ (dm).

Marjan Jerman (2), Trbovlje

1960. (Popravljeni tekst zadatka:) *Uspravni kružni stožac presiječen je, paralelno s bazom, ravninom koja ga dijeli na dva dijela koja imaju:* a) *jednaka oplošja i ujedno* b) *jednake volumene.*

Koliki je, u takvom slučaju, kut na vrhu osnog presjeka?

Pošto je $V = 2\,V_1$ tada je

$$\frac{r^2\pi\cdot v}{3} = 2\cdot\frac{r_1^2\pi\cdot v_1}{3},$$

$$r^2 v = 2\,r_1 v_1^2,\quad v_1 = \frac{r^2 v}{2\,r_1^2}.$$

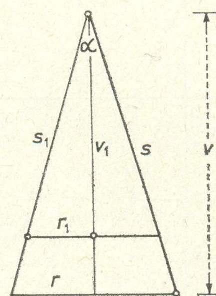
Iz razmjera

$$v_1 : r_1 = v : r \text{ je } v_1 = \frac{r_1}{r}\,v.$$

Odavde je:

$$\frac{r^2 v}{2\,r_1^2} = \frac{r_1}{r}\,v,$$

$$\text{tj.}\quad r = r_1\cdot\sqrt[3]{2}.$$



Dakle:

$$r_1 : r = v_1 : v = s_1 : s = 1 : \sqrt[3]{2},$$

tj.

$$s = s_1\sqrt[3]{2},\quad v = v_1\sqrt[3]{2}.$$

Pošto je:

$$O = 2\,O_1$$

tada je

$$B_1 + Pl_1 = B + B_1 + Pl - Pl_1 \Rightarrow$$
$$2\,Pl_1 = B + Pl$$
$$2\,r_1\pi s_1 = r\pi(r+s)$$
$$2\,r_1 s_1 = r(r+s)$$
$$2\,r_1 s_1 = r_1\sqrt[3]{2}(r_1\sqrt[3]{2} + s_1\sqrt[3]{2}).$$

Odavde je

$$r_1 = s_1(\sqrt[3]{2} - 1).$$

Najzad:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r_1}{s_1} = \sqrt[3]{2} - 1.$$

Odavde je

$$\alpha \approx 30°8'$$

Mario Škrtić (2), Karlovac

1961. *Riješiti jednadžbu*

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$$

$$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x - (\cos x + \cos 3x) - \cos 2x = 0$$

$$2\sin 2x\cos x + \sin 2x - 2\cos 2x\cos x - \cos 2x = 0$$

$$\sin 2x\,(2\cos x + 1) - \cos 2x\,(2\cos x + 1) = 0$$

$$(\sin 2x - \cos 2x)\cdot(2\cos x + 1) = 0.$$

I $\sin 2x - \cos 2x = 0$

$\sin 2x = \cos 2x \,/ : \cos 2x \neq 0$ (za $\cos 2x = 0$ je $\sin 2x - \cos 2x \neq 0$);

$$\operatorname{tg} 2x = 1,\ 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\quad k\in Z.$$

II $2\cos x + 1 = 0,\quad \cos x = -\frac{1}{2}$

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2\,k\pi,\ k\in Z.$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\,k\pi,\ k\in Z,$$

Rješenje zadatka je

$$x\in\left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3} + 2\,k\pi,\ \frac{4\pi}{3} + 2\,k\pi : k\in Z\right\}.$$

Dalibor Paar (3), Zagreb

1962. *Riješiti jednadžbu*

$$\binom{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{x-1}\right) = 24.$$

Mijenjajući $\binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$ imamo

$$\frac{x(x-1)}{2}\cdot\frac{x}{x-1} = 24,\quad x\neq 1,\ x^2 = 48 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \pm 4\sqrt{3}.$$

Ovo je rješenje »prilično sumnjivo«. [Većina zapazila. Korektor se ispričava.] Pretpostavimo da u zadatku ne piše razlomačka crta (kad bi bila crta zagrada oko tog razlomka ne bi bila potrebna). Tada imamo zadatak:

1962 (**p**). *Riješite* $\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \binom{x}{x-1} = 24.$

Znajući da je $\binom{x}{x-1} = \binom{x}{1} = x$ dobivamo

$$\frac{x(x-1)}{3} \cdot x = 24$$

$$x^2(x-1) = 48$$

$$x^3 - x^2 - 48 = 0$$

$$(x-4)(x^2+3x+12) = 0$$

Postoje dvije mogućnosti:

$$x - 4 = 0$$

i

$$x^2 + 3x + 12 = 0$$

Za prvu mogućnost dobivamo $x = 4$, a za drugu ne dobivamo rješenje u skupu R je $D = 3^2 - 4 \cdot 12 = -39 < 0$.

Jedino rješenje je $x = 4$.

Dalibor Tužinski (2), Slav. Požega

1963. *Vjerojatnost da žarulja (sijalica) ostane ispravna nakon* 1000 *sati rada jednaka je* 0,2. *Kolika je vjerojatnost da bar jedna od* 4 *žarulje ostane ispravna nakon* 1000 *sati rada?*

Vjerojatnost da jedna žarulja nakon 1000 sati rada neće biti ispravna je

$$p_1 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8,$$

a vjerojatnost da sve četiri neće biti ispravne jednaka je

$$p_2 = p_1^4 = 0{,}8^4 = 0{,}4096.$$

Vjerojatnost da se neće dogoditi da su sve 4 žarulje neispravne nakon 1000 sati rada, tj. da je *bar jedna* ispravna je

$$p = 1 - p_2 = 1 - 0{,}4096 \approx 0{,}59 =$$
$$= 59\ \%.$$

Dalibor Paar (3), Zagreb

1964. *Površina trokuta je* 8, *a dva njegova vrha su u točkama* $A(1, -2)$, $B(2, 3)$. *Odrediti koordinate trećeg vrha* C *ako on leži na pravcu* $2x + y - 2 = 0$.

Rješenje **A**:

Neka su x i y koordinate vrha C. Koordinate tada zadovoljavaju jednadžbu

$$y = -2x + 2.$$

Iz uvjeta za površinu trokuta dobivamo

$$P = \frac{1}{2}\,|1 \cdot (3 - y) + 2(y + 2) + x(-2 - 3)|$$

odakle je

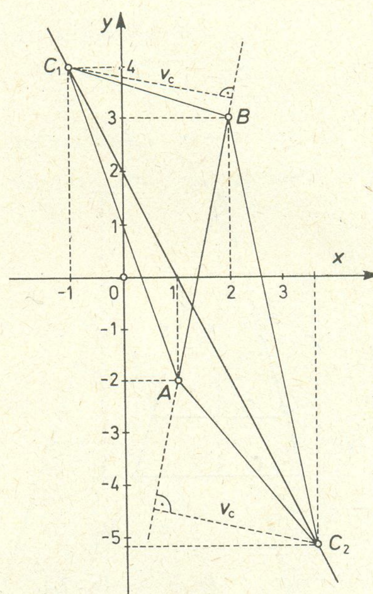
$$2P = |7 + y - 5x|.$$

Uvrštavajući

$$y = -2x + 2 \text{ i } P = 8$$

imamo

$$16 = |9 - 7x|.$$



Razlikujemo dvije mogućnosti:

$$9 - 7x = 16 \Rightarrow x_1 = -1,$$

$$9 - 7x = -16 \Leftarrow x_2 = \frac{25}{7}.$$

Uzimajući u obzir $y = -2x + 2$ dobivamo odgovarajuće ordinate

$$y_1 = 4,\ y_2 = \frac{-36}{7}.$$

Koordinate trećeg vrha C su $(-1, 4)$ ili $\left(\frac{25}{7}, \frac{-36}{7}\right)$.

Dalibor Tužinski (2), Slav. Požega

Rješenje **B**:

$$P_{ABC} = \frac{|AB| \cdot v_c}{2},$$

$$|AB| = \sqrt{26}, \; v_c = \frac{8}{13}\sqrt{26}.$$

Visina v_c je udaljenost vrha $C(x_c, y_c)$ od pravca AB kojemu je jednadžba $5x - y - 7 = 0$. Dakle:

$$v_c = \frac{|5x_c - y_c - 7|}{\sqrt{26}} = \frac{8}{13}\sqrt{26},$$

tj.

$$|5x_c - y_c - 7| = 16.$$

Supstitucijom $y_c = -2x_c + 2$ dobivamo jednadžbu:

$$|7x_c - 9| = 16.$$

Dva su rješenja:

$$C_1\left(\frac{25}{7}, -\frac{36}{7}\right) \text{ i } C_2(-1, 4).$$

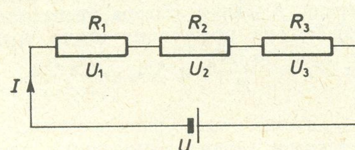
Branka Tokić (3), Zadar

E) Rješenja iz fizike

819. *Vodič se sastoji od tri željezne žice koje su redom spojene jedna za drugu. Sve tri žice imaju jednake dužine od po* $l = 5$m. *Površina poprečnog presjeka prve žice iznosi* $S = 1{,}1$ mm², *dok su površine poprečnih presjeka ostalih dviju žica* $S_1 = 2S$ *i* $S_0 = 3S$. *Na krajevima takvog vodiča uspostavi se stalan napon* $U = 11$ V. *Kolika struja protiče kroz svaku žicu? Koliki je pad napona u svakoj žici? Otpornost željeza iznosi* $\varrho = 12\,\mu\Omega$ cm.

Otpori žica redom su jednaki

$$\varrho\frac{l}{S}, \; \varrho\frac{l}{2S}, \; \varrho\frac{l}{3S}.$$



Te tri žice spojene su međusobno serijski (vidi sliku) pa je ukupan otpor

$$R = \varrho\frac{l}{S} + \varrho\frac{l}{2S} + \varrho\frac{l}{3S} = \varrho\frac{11\,l}{6S}.$$

Struja koja protiče kroz svaku žicu je jednaka i iznosi

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{\varrho \cdot \frac{11\,l}{6\,S}} = \frac{6\,U\,S}{11\,\varrho\,l} =$$

$$= \frac{6 \cdot 11\text{V} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2}{11 \cdot 12 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\text{m} \cdot 5\,\text{m}} = 11\text{ A}.$$

Pad napona na svakoj žici jednak je umnošku struje i otpora te žice, odnosno

$$U_1 = I\,\varrho \cdot \frac{l}{S} = 11\text{ A} \cdot 12 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\text{m} \cdot$$

$$\cdot \frac{5\text{ m}}{1{,}1 \cdot 10^{6}\,\text{m}^2} = 6\text{ V},$$

$$U_2 = I\,\varrho \cdot \frac{l}{2\,S} = 3\text{V},$$

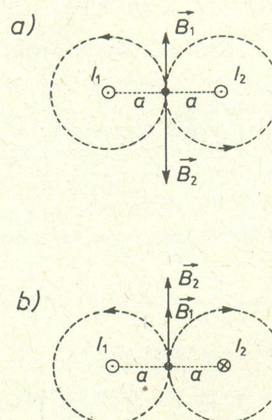
$$U_3 = I\,\varrho \cdot \frac{l}{3\,S} = 2\text{V}.$$

Dalibor Tužinski (2), Slav. Požega

820. *Dvije dugačke ravne žice nalaze se u zraku u paralelnom položaju na međusobnoj udaljenosti* $dt = 6$ cm. *Izračunati ukupnu indukciju magnetskog polja u točkama koje leže na sredini udaljenosti žica kada kroz žice protiču struje jakosti* $I_1 = 6$A *i* $I_0 = 9$A, *i to:* a) *kroz obje žice u istom smjeru;* b) *u različitim smjerovima.*

a) Pošto točke u kojima se traži magnetna indukcija leže na sredini udaljenosti žica, udaljenost od oba pravodnika je

$$a = \frac{d}{2} = 3\text{ cm}.$$



Na sl. a) prikazan je poprečni presjek žica kroz koji teku struje I_1 i I_2 u istom smjeru. Tada su silnice magn. polja suprotno orijen-

tisane. Provodnik kroz koji teče struja I_1 stvaraće indukciju

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{a} = 6 \cdot 10^{-5}\ \text{T} = 60\ \mu\text{T}$$

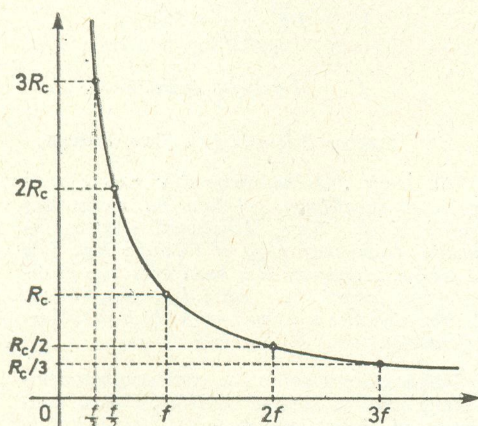
gdje je μ_0 — magnetna permeabilnost u vakuumu.

Za drugi provodnik je

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_2}{a} = 4 \cdot 10^5\ \text{T}. = 40\ \mu\text{T}.$$

Ukupna magn. indukcija je

$$B = B_2 - B_1 = 2 \cdot 10^{-5} = 20\ \mu\text{T}.$$



b) Ako kroz žice teku struje I_1 i I_2 u različitim smjerovima silnice magnetnih polja su jednako orijentisane, pa je

$$B = B_1 + B_2 = 10^{-4}\ \text{T} = 100\ \mu\text{F}.$$

Nenad Mićić (3), Banja Luka

821. *Izračunati kapacitivni otpor kondenzatora kapaciteta $C = 1\ \mu$F, kada je veza u kolo kroz koje protiče naizmenična struja frekvencije $f = 50$ Hz. Grafički prikazati kako se menja kapacitivni otpor ovog kondenzatora pri promeni frekvencije struje.*

Otpor koji kondenzator pruža naizmeničnoj struji je:

$$R_c = \frac{1}{c\,\omega} = \frac{1}{c\,2\pi f} = \frac{k}{f}, \text{ gde je } k = \frac{1}{2\pi c} =$$

$$= 159235{,}66\ \text{F}^{-1},$$

pa je za

$$f = 50\ \text{Hz},\ R_c = 3184{,}71\ \Omega.$$

Za 2, 3, 4, ... puta veću frekvenciju naizmenične struje, kapacitivni otpor je 2, 3, 4, ... puta manji i obrnuto, što je i grafički prikazano.

Jadranka Glamočić (2), Futog

822. *Tanko sabirno sočivo je napravljeno od stakla indeksa loma $n_s = 1{,}6$. Kada se nalazi u vazduhu, njegova žižna daljina iznosi $f_1 = 20$cm. Kolika će biti žižna daljina tog sočiva ako se stavi u tečnost kroz koju se svetlost širi brzinom $v = 2{,}4 \cdot 10^7$ m/s?*

Iz jednačine tankog sabirnog sočiva u opštem slučaju, dobijamo da za žižnu daljinu f_1 važi:

$$\frac{1}{f_1} = (n_s - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \qquad (1)$$

gde su r_1 i r_2 poluprečnici krivina sočiva. Ako se isto sočivo stavi u tečnost indeksa loma n_t, njegova žižna daljina je f_2, pa je

$$\frac{n_t}{f_2} = (n_s - n_t)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

tj.

$$\frac{1}{f_2} = \left(\frac{n_s}{n_t} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (2)$$

Indeks loma tečnosti

$$n_t = \frac{c}{v} = 1{,}25.$$

Iz relacija (1) i (2) nalazimo f_2:

$$f_2 = f_1 \cdot \frac{n_t\,(n_s - 1)}{n_s - n_t} = 42{,}86\ \text{cm}.$$

Miloš Guzijan (4), Zrenjanin

823. *Физичко-хемијским методама је установљено да се у комаду неког минерала налази $m_1 = 3{,}8$ g урана и $m_2 = 8$ mg олова створеног радиоактивним распадањем урана. Колика је старост тог минерала односно геолошког слоја из којег је минерал одстрањен? Масени број урана износи $A = 238$, масени број олова $A = 206$, а време полураспада урана $T = 4{,}5 \cdot 10^9$ година.*

Број нераспаднутих језгара атома урана опада по закону $N_u = N_0 \cdot 2^{-t/T}$, при чему је $N_0 = N_u + N_{Pb}$ (N_0 -почетни број језгара атома урана, N_{Pb}-број језгара атома олова, N_u -број језгара преосталих атома урана). Како је $N_u = \dfrac{m_1 N_A}{A_u}$ и $N_{Pb} = \dfrac{m_2 N_A}{A_{Pb}}$

(A_u и A_{Pb}-атомске масе урана и олова, m_1 и m_2 -масе урана и олова у минералу), следи:

$$t = T \cdot \frac{\log (N_0/N_u)}{\log 2} = T \cdot \frac{\log (1 + N_{Pb}/N_u)}{\log 2} =$$

$$= T \cdot \frac{\log\left(1 + \dfrac{m_2 A_u}{m_1 A_{Pb}}\right)}{\log 2} = 15{,}7 \cdot 10^6 \text{ година.}$$

Милан Обрадовић (3), Нови Сад

824. *Jedna jezgra urana 235 oslobodi pri nuklearnoj fisiji ukupnu energiju $E_1 = 201$ MeV. Kolika se masa urana 235 utroši u nuklearnom reaktoru u toku $t = 24$ h kad reaktor u toku toga vremena radi sa konstantnom snagom $P = 50$ MW?*

Snaga reaktora je data odnosom

$$P = \frac{A}{t},$$

gdje je A oslobođena nuklearna energija u reaktoru za vrijeme t. Ta energija iznosi

$$A = P \cdot t = 4{,}32 \cdot 10^{12} \text{ J}.$$

Pri nuklearnoj fisiji jednog jezgra urana 235 oslobodi he energija

$$E_1 = 201 \text{ MeV} = 3{,}216 \cdot 10^{-11} \text{ J},$$

pa se sa oslobađanje energije A mora izvršiti fisija

$$n = \frac{A}{E_1} = 1{,}343 \cdot 10^{23}$$

jezgara urana 235.

Masa m jednog jezgra atoma urana 235 može se odrediti pomoću masenog broja ovog izotopa i Avogadrovog broja. Biće

$$m = \frac{235 \text{ g}}{6{,}025 \cdot 10^{23}} = 3{,}9 \cdot 10^{-22} \text{ g}.$$

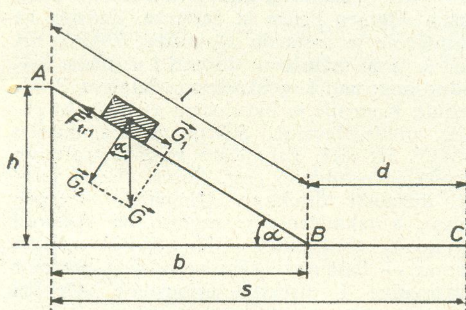
Masa n jezgara koja su u toku 24 sata pretrpjela fisiju iznosi

$$m_1 = n\,m \approx 52{,}4 \text{ g}.$$

Nenad Mićić (3), Banja Luka

825. *Sa vrha brda visokog h spuštaju se saonice i zaustave se s daleko od projekcije vrha brda na horizontalnu ravninu. Koliki je koeficijent trenja μ?*

Zadatak ćemo riješiti primjenom zakona o održanju energije.



Saonice krenu iz mirovanja (tačka A) i zaustave se u tački C, pa je promjena kinetičke energije jednaka nuli. Pri spuštanju sa brda potencijalna energija saonica se smanji. Promjena potencijalne energije jednaka je radu sila trenja:

$$m\,g\,h = F_{tr1} \cdot l + F_{tr2} \cdot d.$$

Sila trenja duž puta AB je $F_{tr_1} = \mu \cdot G_2$ jer je G_2 komponenta težine tijela koja je okomita na kosinu. Pošto je $\cos\alpha = \frac{G_2}{G} = \frac{b}{l}$ (vidi sliku) onda je $F_{tr_1} = \mu \cdot G \cdot \frac{b}{l} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{b}{l}$. Sila trenja duž puta BC je $F_{tr2} = k \cdot G = k\,m\,g$ jer je na ovom putu sama težina tijela okomita na ravninu, te je

$$m\,g\,h = \mu\,m\,g\frac{b}{l} \cdot l + \mu\,m\,g\,d.$$

Odatle dobivamo da je $b + d = \frac{h}{\mu}$, a pošto je $b + d = s$ to je $s = \frac{h}{\mu} \Leftarrow \mu = \frac{h}{s}$.

Znači: koeficijent trenja je $\mu = \frac{h}{s}$.

Enes Kalajac (2), Živinice

(**Ispravak.** U br. 3/150, na str. 91, u lijevom stupcu, rješenje b) treba glasiti:

$$h_1' = l \cdot \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = 2{,}25 \text{ m}.$$

Ovu visinu kuglica ne može postići, jer je vezana. Postignuvši maksimalnu visinu od 2 m, kuglica se prebaci na drugu stranu;

$$h_2' = l \cdot \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = 0{,}25 \text{ m}.)$$

F) Rješenja iz matematike za ekonomsko usmjerenje

666. *Netko je primao prije 2 godine OD mjesečno u iznosu od 40 000 dinara, a danas prima mjesečno 67 200 dinara. Izračunajte godišnji postotak povećanja u prvoj godini uz uvjet da je postotak povećanja u drugoj godini bio dva puta veći nego u prvoj godini a odnosi se na svotu krajem prve godine. Ako se takav isti trend povećanja nastavi, koliki mjesečni iznos će dobivati na kraju slijedeće godine računajući od danas?*

Prema uvjetima zadatka dobiva se jednadžba:

$$40\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{2p}{100}\right) = 67\,200,$$

a odavde se poslije sređivanja dobiva kvadratna jednadžba $p^2 + 150p - 3400 = 0$, čije jedno rješenje $p = 20$ zadovoljava zadatak. Godišnji postotak povećanja u prvoj godini iznosi $p = 20$. Za treću godinu, odnosno za slijedeću

godinu računajući od danas može se očekivati postotak povećanja 80 i svota OD mjesečno $67\,200 \cdot \left(1 + \frac{80}{100}\right) = 120\,960$ u dinarima.

667. *Pet parova imaju na raspolaganju za klizanje puni sat. Samo dva para kližu istovremeno. Ako nema prekida zbog izmjene parova, i dopustivši svakom paru da kliže jednako dugo vremena, koliko vremana može svaki par klizati?*

Označimo parove sa 1, 2, 3, 4, 5. Zabilježimo neke kombinacije parova koji kližu istovremeno: 1, 2; 3, 1; 4, 5. Ima ukupno $\binom{5}{2} = 10$ kombinacija parova koji mogu istovremeno klizati. Svaka kombinacija od po dva para može klizati 6 minuta. Kako se svaki par pojavljuje u 4 kombinacije, to svaki par može klizati 24 minute.

668. *Dugoročni zajam od* 2 000 000 *dinara treba otplatiti za 5 godina godišnjim anuitetima* a) *uz godišnji kamatnjak* $p_1 = 24{,}75$, *ukamaćivanje godišnje dekurzivno,* b) *uz godišnji kamatnjak* $p_2 = 24$, *ukamaćivanje godišnje dekurzivno. Za koliko % je anuitet u dijelu* a) *zadatka veći od anuiteta u* b) *zadatku?*

a) $a_1 = 2\,000\,000 \cdot 1{,}2475^5 \cdot (1{,}2475 - 1) : (1{,}2475^5 - 1)$ Izračunajmo pomoću logaritamskih tablica $x = 1{,}2475^5$ pa je $\log x = 5 \cdot \log 1{,}2475 = 0{,}48020$ i $x = 3{,}0213$ pa je $a_1 = 2\,000\,000 \cdot \frac{3{,}0123 \cdot 0{,}2475}{2{,}0213} = 739\,892.$

b) $a_2 = 2\,000\,000 \cdot 1{,}24^5 \cdot 0{,}24 : (1{,}24^5 - 1)$. Izračunajmo pomoću logaritamskih tablica $y = 1{,}24^5$. Odavle je $\log y = 5 \cdot \log 1{,}24 = 0{,}46710$. Odavde je $y = 2{,}9316$, $a_2 = 2\,000\,000 \cdot 2{,}9316 \cdot 0{,}24 : 1{,}9316 = 728\,499$. Anuitet u a) je za 1,56% veći od anuiteta u b).

669. *Znak su sastoji od pet znamenaka* 0, 1, 2, 3, 4, *koje se mogu ponavljati. Kolika je vjerojatnost da će se pogoditi znak* a) *koji ima* 0 *barem na prvom i trećem mjestu,* b) *koji ima* 0 *samo na prvom i trećem mjestu?*

a) Ako se zahtijeva da u znaku bude 0 barem na prvom i trećem mjestu, onda preostala tri mjesta možemo popuniti sa svih pet znamenaka, tj. na 5^3 načina. To su varijacije trećeg razreda s ponovljanjem od pet elemenata. Broj mogućih slučajeva je 5^5 a to su varijacije od pet elemenata petog razreda s ponavljanjem. Tražena vjerojatnost je $5^3 : 5^5 = \frac{1}{25}$.

b) Broj mogućih slučajeva je 5^5, a broj povoljnih slučajeva je 4^3 jer 0 smije biti samo na prvom i trećem mjestu, pa je tražena vjerojatnost $4^3 : 5^5 = \frac{64}{3125}$.

670. *Svotu od* 3 000 000 *dinara treba podijeliti na pet dijelova. A dobiva* $\frac{1}{4}$ *svote,* B *dobiva* 20% *iznosa koji dobiva* A; C *dobiva* $\frac{1}{3}$ *ostatka pošto su podmireni* A *i* B; D *dobiva* 150% *iznosa koji je dobio* C; E *dobiva ostatak pošto su podmireni* A, B, C, D. *Koji je dobio najviše a koji najmanje i koliko iznose te svote?*

A dobiva $\frac{1}{4}$ svote, B dobiva $\frac{20}{100} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$ svote. A i B zajedno dobivaju $\frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{6}{20}$ svote. Ostatak je $\frac{14}{20}$ svote. C dobiva $\frac{1}{3} \cdot \frac{14}{20} = \frac{7}{30}$ svote. D dobiva 150 % $\cdot \frac{7}{30} = \frac{15}{10} \cdot \frac{7}{30} = \frac{7}{20}$ svote. Za E je ostatak $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{7}{30} + \frac{7}{20}\right) = 1 - \left(\frac{15}{60} + \frac{3}{60} + \frac{14}{60} + \frac{21}{60}\right) = \frac{7}{60}$. Najviše dobiva D, tj. $\frac{21}{60}$ svote a to je 1 050 000 dinara. Najmanje će dobiti B, tj. $\frac{3}{60}$ svote a to je 150 000 dinara.

ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

Takmičenje srednjoškolaca SR Bosne i Hercegovine iz matematike

U Sarajevu je 4. aprila 1987. godine održano 29. republičko takmičenje mladih matematičara, učenika srednjeg usmjerenog obrazovanja i vaspitanja SR BiH. Učestvovao je 161 učenik i to po razredima: I—35, II—37, III—38 i IV—51. Organizator takmičenja je bila Gimnazija »Ognjen Prica« iz Sarajeva. Zadatke za takmičenje je sastavila Komisija DMFA SR BiH koje su sačinjavali docenti i asistenti Prirodno-matematičkog fakulteta iz Sarajeva. Predsjednik Komisije je bio docent *dr Milenko Pikula*, predsjedavajući Sekcije za matematiku DMFA SR BiH. Takmičare, njihove profesore i goste je pozdravio *prof. Žarko Misilo*, vršilac dužnosti direktora Gimnazije »Ognjen Prica«, a takmičenje je otvorio *mr Milorad Mijatović*, predsjednik OK SSSRN opštine Centar — Sarajevo i sâm nekadašnji profesor matematike i direktor Gimnazije »Ognjen Prica«.

Kao pratioci učenika — takmičara u Sarajevu, koje je tih dana slavilo 42. godišnjicu oslobođenja, našao se na okupu veći broj srednjoškolskih profesora matematike. Dok su učenici rješavali postavljene im zadatke, i ove godine organizovan je okrugli sto o važnim pitanjima iz nastave matematike u SR BiH. Razgovore je vodio *dr Milenko Pikula.* Na kraju ovih razgovora rukovodilac Ljetne škole mladih matematičara u Trebinju *mr Šefket Arslanagić* je podnio izvještaj o radu II ljetne škole održane prošlog ljeta u Trebinju. I ovog ljeta Škola će nastaviti sa radom u Trebinju od 3. do 8. avgusta 1987. godine. Svi prisutni su podržali rad ove škole i istakli njenu važnost i značaj za mlade matematičare. U poslijepodnevnim časovima učenici — takmičari i njihovi profesori su u organizaciji domaćina posjetili Spomen-park žrtvama fašizma na Vracama i olimpijska borilišta u okolini Sarajeva. Recimo i to da su učenici i njihovi profesori bili smješteni u hotelu »Park« u Vogošći. Organizator takmičenja je štampao dva sadržajna biltena o ovom takmičenju. Na kraju takmičenja učenicima, profesorima i gostima se obratio *prof. dr Miloš Tomić,* predsjednik Predsjedništva DMFA SR BiH.

ZADACI (i neka rješenja)

I—1. Neka je $a \neq 0$, $b \neq 0$ i $c = -2n$, $n \in N$. Ako je $a + b + c = 0$, pokazati da je

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 - c^2}$$

prirodan broj koji je djeljiv sa 3.

I—2. U unutrašnjosti jednakostraničnogtrougla stranice $a = 1$ nalazi se 5 tačaka. Dokazati da među njima postoje dvije tačke čija je udaljenost manja ili jednaka 1/2.

[*Rješenje*: Trougao se može podijeliti na četiri podudarna jednakostranična trougla stranice 1/2.

Prema Dirihleovom principu barem u jednom od ta četiri trougla nalaze se barem dvije tačke (od datih pet). Njihova udaljenost je manja ili jednaka od 1/2.]

I—3. Naći sve četverocifrene brojeve oblika $\overline{aabb}$ (a i b su cifre), koji su potpuni kvadrati nekog prirodnog broja.

I—4. Tačka M leži u unutrašnjosti oštrog ugla s vrhom A. Iz tačke M spuštene su normale MP i MQ na krakove ugla. Iz tačke A spuštena je normala AK na duž PQ. Dokazati $\sphericalangle PAK = \sphericalangle MAQ$.

II—1. *Naći sve realne vrijednosti x za koje je $\frac{x}{x^2 - 5x + 7}$ cijeli broj.*

II—2. *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} \geqslant 1.$*

II—3. *Ako za sve tačke P neke ravni vrijedi nejednakost $\overline{AP} + \overline{DP} \geqslant \overline{BP} + \overline{CP}$, pri čemu su A, B, C, D tačke te iste ravni, tada tačke B i C pripadaju duži $\overline{AD}$ i vrijedi $\overline{AB} = \overline{CD}$. Dokazati.*

II—4. *Učenici su postrojeni u dva reda, tako da ispred svakog učenika stoji učenica koja je niža rastom od njega. Ako učenike postrojimo po veličini i ispred njih po veličini postrojimo učenice, to će opet ispred svakog učenika biti učenica niža od njega. Dokazati.*

[*Rješenje*: Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi i da je učenik A prvi ispred kojeg stoji učenica B koja je viša od njega. Neka se prije učenika A nalazi $k - 1$ učenika. Svaki od tih $k - 1$ učenika je manji od učenika A, pa samim tim i od učenice B. Dakle, za $k - 1$ učenika koji su prije A i učenika A (ukupno za njih k), imamo samo $k - 1$ učenica (one koje su prije učenice B) koje su niže od njih. Kontradikcija.]

III—1. *Dokazati da jednačina $19x^2 + 2 = y^2$ nema rješenja u skupu cijelih brojeva.*

III—2. *Neka su a, b, c realni brojevi i vrijedi $a + b + c = 4$, $a^2 + b^2 + c^2 = 8$.*

Odrediti maksimalnu vrijednost za c (Sa takmičenja u Americi 1978, modifikovano.)

[*Rješenje*: Iz druge jednačine imamo

$$c^2 = 8 - (a^2 + b^2).$$

Koristeći nejednakost

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

imamo

$$c^2 \leqslant 8 - \frac{1}{2}(a + b)^2 = 8 - \frac{1}{2}(4 - c)^2.$$

Posljednja nejednakost je ekvivalentna sa $3c^2 - 8c \leqslant 0$, dakle dobijamo $c \leqslant \frac{8}{3}$.

Ako je $c = \frac{8}{3}$, tada je $a = b = \frac{2}{3}$, pa je za c maksimalna vrijednost $c = \frac{8}{3}$.]

III—3. *Realni brojevi $a_1, a_0, \ldots, a_n$ zadovoljavaju uslove $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant 2a_1$, $a_2 \leqslant a_3 \leqslant 2a_2$, $a_3 \leqslant a_4 \leqslant 2a_3, \ldots,$ $a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant 2a_{n-1}$.*

Dokazati da u sumi $S = \pm a_1 \pm a_0 \pm \ldots \pm a_n$ možemo izabrati znakove tako da vrijedi $0 \leqslant S \leqslant a_1$.

III–4. *U konveksnom n-touglu povučene su neke dijagonale tako da je n-tougao podijeljen na trouglove. (Nikoje dvije dijagonale se ne sijeku u unutrašnjosti n-tougla). Dokazati da je broj povučenih dijagonaa* $n-3$.

IV–1. *Riješite u skupu kompleksnih brojeva sistem jednačina*

$$z^{19}w^{25}=1,\ z^5w^7=1,\ z^4+w^4=2.$$

[*Rješenje*: Kubiranjem druge jednačine dobijamo $z^{15}w^{21}=1$. Iz $z^{19}w^{25}=1$ i $z^{15}w^{21}=1$ dijeljenjem dobijamo $z^4w^4=1$.
Dakle, z^4 i w^4 su rješenja kvadratne jednačine $t^2-2t+1=0$, ili $(t-1)^2=0$.

Odavde $z^4=1$ i $w^4=1$.

$$\text{Iz } z^5w^7=1 \Rightarrow zw^3=1 \Rightarrow z=\frac{1}{w^3}=$$
$$=\frac{w}{w^4}=w.$$

Dakle, rješenja mogu biti parovi: $(1, 1)$, $(-1, -1)$, (i, i), $(-i, -i)$. Uvrštavanjem u sistem se provjeri da su svi ti parovi rješenja.]

IV–2. *Dokazati da svaki konveksan poliedar, ima bar dvije strane (plohe) s jednakim brojem ivica (bridova).*

IV–3. *Ako su dužine stranica nekog četverougla cijeli brojevi i ako je dužina svake stranice djelilac zbira dužina preostale 3 stranice, tada dvije stranice četverougla imaju iste dužine. Dokazati!*

IV–4. *Devet matematičara su se sreli na nekoj internacionalnoj konferenciji i otkrili da, među bilo kojom trojicom od njih, dvojica govore isti jezik. Ako svaki matematičar može govoriti najviše tri jezika, dokaži da postoje trojica među njima koji govore isti jezik.*

[*Rješenje*: Uzmimo proizvoljnog matematičara A koji govori tri jezika (x, y, z). (Ako govori manje od tri jezika zaključivanje je isto). Ako se A može sa svih ostalih osam matematičara sporazumijevati, tada postoje bar dvojica koja se sa A sporazumijevaju na istom jeziku. $(1+1+1<8)$, i to je tražena trojka. Neka se A ne može sporazumjeti sa B. Zbog uslova zadatka bilo koji od ostalih sedam matematičara se može sporazumjeti ili sa A ili sa B. A i B govore ukupno ne više od 6 jezika, a matematičara ima sedam ($\neq$ od A i B), pa mora npr. matematičar B na jeziku w moći razgovarati sa matematičarima C i D. (B, C, D) je tražena trojka.]

REZULTATI TAKMIČENJA

I *razred*

I nagrada:
Cigić Elizabeta, ŠC »M. Vlačić« Vlasenica
Medić Enver, ŠC »Lazar Đukić« Ključ
Andrić Silvija, Gimnazija »Ognjen Prica« Sarajevo
Čerimagić Fehim, ŠC »N. Tesla« Xoča

II nagrada:
Ribić Fatima, Gimnazija Tuzla
Šrkgić Fikret, ŠC »Moše Pijade« Bihać

III nagrada:
Lukač Željko, ŠC »Proleterskih brigada« Pucarevo
Ostović Anđelko, ŠC »Veselin Masleša« Foča
Frljak Samira, ŠC »Janko Balorda« Visoko

Pohvale:
Diklić Aleksandar, Franjić Krešimir, Gimnazija »Ognjen Prica« Sarajevo
Risojević Vladimir, Gimnazija Banja Luka
Šipčić Radica, Gimnazija »Ognjen Prica« Sarajevo
Suljić Damir, ŠC »Boris Kidrič) Vitez

II *razred*

I nagrada:
Jamak Anes, Gimnazija »Ognjen Prica« Sarajevo

II nagrada:
Mičić Aleksandar, Gimnazija Banja Luka
Kusalović Dejan, Gimnazija »Aleksa Šantić« Mostar

III nagrada:
Tabaković Darijo, Gimnazija Banja Luka

Pohvale:
Gajić Bojana, Gimnazija »Ognjen Prica« Sarajevo
Borovina Nihad, ŠPO »Nikola Tesla« Foča
Ivanović Stanislav, ŠCS »Nikola Tesla« Foča
Kelava Miroslav, Gimnazija »29. novembar« Zenica
Kragić Nebojša, Elektrometalska škola Teslić
Stojanović Biljana, Gimnazija »Ognjen Prica« Sarajevo

III *razred*

I nagrada:
Kešelj Vlado, Gimnazija »Ognjen Prica« Sarajevo

II nagrada:
Jocić Aleksandar, SŠC »Nikola Tesla« Foča
Babić Živomir, Gimnazija Banja Luka
Imširpašić Amina, Gimnazija »Ognjen Prica« Sarajevo
Zirojević Srđan, Gimnazija »Ognjen Prica« Sarajevo

III nagrada:
Bosnić Novica, ŠC »Marija Bursać« Titov Drvar

Pohvale:
Tokić Amir, Gimnazija Tuzla
Kerkez Marko, Gimnazija Banja Luka
Sredanović Vera, Gimnazija »Ognjen Prica« Sarajevo
Pavidović Darko, Gimnazija »Ognjen Prica« Sarajevo
Bašić Dejan, SŠC Trebinje

IV razred

I nagrada:
Balić Joško, Gimnazija Tuzla
II nagrada nije dodijeljena
III nagrada:
Karamustafić Jasmin, SŠC »Mahmut Bušatlija« Bugojno
Pohvale:
Čolić Leljko SŠC Hadžići
Omerdić Edin, Gimnazija Tuzla

Pohvale su dobile ove škole čiji su učenici bili najuspješniji:
Gimnazija »Ognjen Prica« Sarajevo
Gimnazija Tuzla
Gimnazija Banja Luka
ŠC »Nikola Tesla« Foča
kao i profesori čiji su učenici imali najviše uspjeha na ovom takmičenju:
Stijačić Rašela-Dina, Gimnazija »Ognjen Prica« Sarajevo
Alić Meliha, Gimnazija »Ognjen Prica« Sarajevo
Đurković Radivoje, Gimnazija Tuzla
Vasić Gojko, Gimnazija Banja Luka

mr Šefket Arslanagić, Trebinje

Republički susret mladih matematičara SR Hrvatske (1987)

Ovogodišnji ciklus natjecanja počeo je općinskim susretima na kojima je sudjelovalo 2763 učenika iz 47 srednjih škola. Republička komisija za organizaciju i provođenje susreta iz matematike pregledala je pristigle izvještaje i pozvala na republički susret 118 učenika (I — 41 učenik, II — 30 učenika, III — 22 učenika, IV — 25 učenika).

Susret je održan u Medulinu (Pula) od 27. do 29. ožujka pod pokroviteljstvom Skupštine općine Pula i 10 društveno-političkih i radnih organizacija i SIZ-ova. Organizatori susreta bili su Narodna tehnika SR Hrvatske — Pokret »Nauku mladima«, Društvo matematičara i fizičara SR Hrvatske, Zavod za prosvjetno-pedagošku službu SR Hrvatske, Savez organizacija za tehničku kulturu općine Pula. Domaćin susreta bila je Osnovna škola Medulin.

Za neobavezni dio susreta Republička komisija je predložila 10 tema. Svoje radnje su izlagali: *Babić Dragana* (»Ptolemejev teorem«), *Čaušić Blaženka* (Simetrični polinomi dviju varijabli«), *Drača Jasna* (»Racionalne nule polinoma«), *Ilišević Dijana* (»Aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina«) i *Milisavljević Nada* (»Aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina«).

Obavezni dio susreta bilo je uobičajeno republičko natjecanje iz matematike. Rezultati i zadaci s toga natjecanja:

Nagrade i pohvale

I razred
Božićević Miran, MIOC »Vladimir Popović«, Zagreb, II nagrada
Šilović Miroslav, MIOC, Split, II nagrada
Jakšić Ozren, MIOC »Vladimir Popović«, Zagreb, pohvala
Žanić Marija, CUO »Braća Ribar«, Osijek, pohvala
Mikšić Miran, ŠC »Gabrijel Santo«, Varaždin, pohvala

II razred
Poljak Ljiljana, CUO »10. kolovoz«, Sinj, I nagrada
Tužinski Dalibor, CUO »Zvonko Brkić«, Sl. Požega, I nagrada
Slijepčević Siniša, MIOC »Vladimir Popović«, Zagreb, II nagrada
Medvid Boris, CUO »10. kolovoz«, Sinj, III nagrada
Bombardelli Mea, MIOC, Split, III nagrada
Bastijanić Ksenija, SŠC »Mate Blažina«, Labin, pohvala
Tutić Željko, CUO »Ruđer Bošković«, Zagreb, pohvala
Jeras Miroslav, MIOC »Vladimir Popović«, Zagreb, pohvala
Matošić Igor, MIOC, Split, pohvala
Tomac Lidija, CUO »Sladimir Nazor«, Čabar

III razred
Črnja Zoran, CZKUOIK, Rijeka, II nagrada
Passek Kornelija, MIOC »Vladimir Popović«, Zagreb, II nagrada
Starešinić Damir, MIOC »Vladimir Popović«, Zagreb, II nagrada
Uroić Milivoj, MIOC »Vladimir Popović«, Zagreb, pohvala
Milin Matko, MIOC »Vladimir Popović« Zagreb, pohvala

IV razred
Poljak Joško, CUO »10. kolovoz«, Sinj, II nagrada
Carević Hrvoje, MIOC »Vladimir Popović«, Zagreb, III nagrada
Zlokapa Danko, CUO »Branko Semelić«, Pula, III nagrada
Aglić Andrea, MIOC, Split, pohvala

Zadaci

I—1. *Kolika je površina skupa (u pravokutnom koordinatnom sustavu) svih tačaka* (x, y) *za koje je*

$$|x| + |y| + |x + y| \leqslant 2?$$

I—2. *Neka je P proizvoljna točka unutar pravokutnika ABCD. Dokaži da je zbroj udaljenosti točke P do vrhova pravokutnika manji od opsega pravokutnika. Da li ta tvrdnja vrijedi ako je ABCD trapez?*

I—3. *Neka je n prirodan broj. Dokaži da je najveća zajednička mjera brojeva* $n^2 + 1$

$(n+1)^2+1$ *ili* 1 *ili* 5, *i dokaži da je jednaka* 5 *ako i samo ako je* $n \equiv 2 \pmod 5$.

I—4. *Dokaži da za pozitivne brojeve* a, b *vrijedi*

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}.$$

II—1. *Dokaži da* $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[5]{5}$ *nije racionalan broj!*

II—2. *Za koju vrijednost parametra* m *polinomi*

$$x^4 + mx^2 + 1 \text{ i } x^3 + mx + 1$$

imaju zajednički korijen?

II—3. *Polje ima oblik trokuta kome su duljine stranica* a, b, c. *Iz helikoptera koji nepomično lebdi u zraku sve se stranice vide pod pravim kutom.*
Na kojoj je visini helikopter?

II—4. *Rastavi na linearne faktore (u području kopmleksnih brojeva) izraz*

$$(y-z)^5 + (z-x)^5 + (x-y)^5.$$

III—1. *Nađi sve vrijednosti prirodnog broja* n *za koje je polinom*

$$(x+1)^n - x^n - 1 \text{ djeljiv sa } x^2 + x + 1.$$

III—2. *Neka je* $A \subset C \setminus \{0\}$ *skup sa svojstvima*

$$x \in A \Rightarrow \frac{1}{x} \in A \wedge 1 - x \in A.$$

Da li postoji skup A *koji ima točno 5 elemenata?*

III—3. *U bazi* 2 *dan je broj* $\underbrace{111\ldots 11}$ *(n jedinica). Nađi, također u bazi* 2, *njegov kvadrat.*

III—4. *Zadan je trokut* ABC *te točka* S *unutar njega. Pravci* AS, BS, CS *dijele trokut na šest manjih trokuta. Dokaži da barem dva od njih imaju površinu manju ili jednaku od šestine površine trokuta* ABC.

IV—1. *Ravnina prolazi jednim bridom pravilnog tetraedra i dijeli obujam tetraedra u omjeru* 3 : 5. *Nađi tangense kutova* α i β *na koje ta ravnina dijeli prikloni kut onih dviju strana tetraedra koje se sastaju u tom bridu!*

IV—2. *Neka su* n, p *proizvoljni prirodni brojevi,* $p \geqslant 2$. *Dokaži da* $\sqrt{n^p + p}$ *nije racionalan broj.*

IV—3. *Zadana je funkcija* $f: N \to R$ *rekurzivnim relacijama*

$$f(1) = 2$$
$$f(2) = 3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(n+1) \cdot f(n-1) = f(n)^2 + (-1)^n,$$
$$n \geqslant 2.$$

a) *Dokaži da je* $f(n) \in N$, $\forall n \in N$. b) *Dokaži da je* f *rastuća funkcija.*

IV—4. *Zbroj prvih* n *članova jednog niza dan je izrazom*

$$s_n = 9{,}5\,n^2 - 89{,}5\,n.$$

a) Nađi opći član tog niza i pokaži da je niz aritmetički!

b) Pokaži da u promatranom nizu postoji jedan član koji je dva puta veći od zbroja svih prethodnih članova i nađi taj član.

Zdravko Kurnik

23. savezno natjecanje mladih fizičara

23. savezno natjecanje učenika srednjih škola iz fizike održano je od 15. do 17. svibnja 1987. u Ljubljani. Organizator natjecanja je bilo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije i Srednja naravoslovna šola u Ljubljani gdje se natjecanje i održalo. Natjecanje se odvijalo prema pravilima saveznog natjecanja u tri grupe: Mehanika i toplina (A),



Titranje i valovi. Elektricitet i magnetizam (B), Optika, fizika atoma sa teorijom relativnosti (C), i okupilo je 83 učenika iz cijele Jugoslavije [SR Bosna i Hercegovina (11), SR Crna Gora (3), SR Hrvatska (20), SAP Kosovo (5), SR Makedonija (4), SR Slovenija (14), SR Srbija (20) i SAP Vojvodina (16)].

Radni dio natjecanja održao se u subotu 16 svibnja u prijepodnevnim satima, nakon kojeg su natjecatelji otišli na izlet. Razgledali su jednu od najljepših i najlakše dostupnih evropskih pećina, Postojnsku jamu, gdje živi

biološka znamenitost — čovječja ribica i taj radni dan završili u Delta centru u Novoj Gorici. Tamo su organizatori za natjecatelje i njihove vođe puta priredili društveno veče. U nedjelju 17. svibnja natjecatelji su posjetili Razvojni centar ISKRE DELTE (jednog od pokrovitelja saveznog natjecanja). Nakon toga su se vratili u Ljubljanu na svečano proglašenje rezultata i podjelu nagrada.

Savezna komisija za mlade fizičare na temelju postignutih rezultata nagradila je i pohvalila niz natjecatelja. Njima su pripali vrijedni pokloni — instrumenti pogodni za kućne laboratorije. Poklone su osigurali pokrovitelji saveznog natjecanja: Iskra Delta, Iskra avtomatika, Gorenje, Ilirija Vedrog, Inštitut »Jože Štefan«, Unitex Ljubljana, Adria Airways i Birografika Bori.

Nagrade i pohvale

A GRUPA:

I nagrada
Lamovec Andrej, Slovenija

II nagrada
Todorović Rade, Srbija
Volk Tomaž, Slovenija

III nagrada
Zrinski Igor, Slovenija
Milin Matko, Hrvatska
Cvitanović Ivan, Hrvatska

Pohvale
Prosen Tomaž, Slovenija
Obradović Dragan, Srbija
Nikolić Miodrag, Srbija
Osmić Jakub, Bosna i Hercegovina
Maroević Petar, Hrvatska
Jeraj Robert, Slovenija
Golo Goran, Bosna i Hercegovina
Skračić Sebastijan, Hrvatska

B GRUPA:

I nagrada
Maksimović Netar, Srbija

II nagrada
Pompe Uroš, Slovenija
Milošević Predrag, Srbija

III nagrada
Matić Davor, Hrvatska
Trpkovski Perica, Makedonija
Slišković Maja, Bosna i Hercegovina
Kočić Mikica, Srbija

Pohvale
Vučinić Dragan, Srbija
Trišić Sergej, Hrvatska
Jadrijević Davor, Hrvatska
Bračić Maja, Slovenija
Martelj Alenka, Slovenija

C GRUPA:

I nagrada
Vilfan Andrej, Slovenija
Bajc Jure, Slovenija
Jovanović Božidar, Srbija
Arbanas Goran, Hrvatska
Zanchi Dražen, Hrvatska
Delić Dejan, Vojvodina

II nagrada
Katalinić Višnja, Hrvatska

III nagrada
Hrnjez Boris, Bosna i Hercegovina
Bandić Zvonimir, Srbija

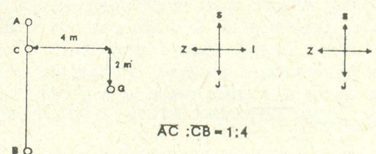
Pohvale
Kovač Tomaž, Slovenija
Bonefačić Davor, Hrvatska
Kopjar Emil, Hrvatska
Hip Ivan, Hrvatska
Guštin Andrej, Slovenija

Posebna nagrada

»Dr Branimir Marković« za najoriginalnije rješenje na Saveznom natjecanju (dodjeljuje ju Društvo matematičara i fizičara SR Hrvatske) na prijedlog Savezne komisije pripala je TRPKOVSKI PERICI, Makedonija.

Evo i **zadataka** koje su rješavali natjecatelji:

A–1. *Dvojica sportista stoje u tačkama A i B i drže štap za njegove krajeve. Istovremeno sportista A počinje da se kreće ka istoku brzinom*

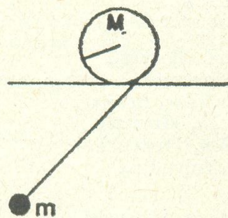


$v_0 = 1$ m/s, *a sportista B ka jugu sa konstantnim ubrzanjem. Nađite to ubrzanje, ako je poznato, da je tačka C sa štapa prošla kroz tačku G (kao na slici).*

A–2. *Možda ste razmišljali o sledećoj dosetci: da li može čovek sa težinom* $G_1 = 700$ N *preneti istovremeno dva tega od po* $G_0 = 100$ N *(žonglirajući sa njima) preko mostića, koji podnosi maksimalno opterećenje od* 800 N?

Analizirajte rešenje i nađite uvjete u kojima će gornja granica sile na most biti minimalna, kao i koliko ona iznosi.

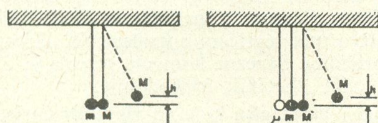
A–3. *Na horizontalnim paralelnim šinama nalazi se homogeni valjak mase M, sa namotanom niti, na čijem kraju je pričvršćen teg mase m. U početku valjak je zakočen i sistem valjak — teg miruje. Zatim se valjak oslobodi. Posle nekog vremena osa valjka se kreće sa konstantnim ubrzanjem a (slika). Uzimajući da se kretanje valjka vrši bez proklizavanja, odrediti:*



a) *odnos masa tega i valjka*

b) *minimalni koeficijent trenja valjka o šine, trenje kotrljanja zanemariti.*

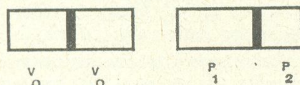
A—4. *Dvije čelične kuglice masa M i m obješene su na nerastezljivim vertikalnim nitima tako, da se dodiruju i njihovi centri masa su na istoj visini. Kuglicu mase M dignemo na visinu h, tako da niti ostaju u istoj vertikalnoj ravnini i pustimo je.*



a) *Pokaži, da se druga kuglica pri sudaru digne najviše do visine* 4*h za bilo koji omjer masa kuglica m/M.*

b) *Pokraj kuglice mase m objesimo kuglicu mase μ tako, da se kuglice dodiruju a centri masa nalaze se na istom pravcu i istoj visini. Kuglicu mase M dignemo i pustimo. Pokaži da je kinetička energija kuglice mase μ najveća, ako je masa* $m = \sqrt{\mu M}$.

A—5. *Horizontalni šuplji valjak razdijeljen je pomičnim klipom nč dva jednaka dijela. Valjak i klip su dobri termički izolatori. Sa svake strane klipa nalazi se po* 10 *litara idealnog plina pod tlakom od* 101,39 kPa *i temperature* 0°C. *Polaganim dovođenjem topline plinu na lijevoj strani valjka klip komprimira plin na desnoj strani do* 342,2 kPa. *Nađi:*



a) *Koliki je rad izvršen na plinu na desnoj strani valjka?*

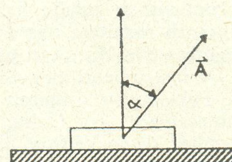
b) *Kolika je konačna temperatura plina na desnoj strani valjka?*

c) *Kolika je konačna temperatura na lijevoj strani valjka?*

d) *Kolika je toplina dovedena plinu na lijevoj strani valjka?*

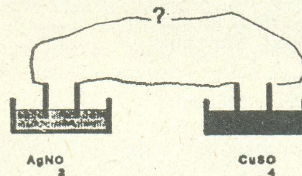
Poznata je molarna toplina plina kod stalnog volumena, $c_v = 16{,}744\ \mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$ *i adijabatska konstanta* $\varkappa = 1{,}5$.

B—1. *Horizontalna ploča, na kojoj leži disk, osciluje po harmonijskom zanonu sa frekvencijom* $f = 10$ Hz *u pravcu koji gradi ugao* $\alpha = 45°$ *sa vertikalom (kao na slici). Koefi-*



cijent trenja diska o ploču je $\mu = 0{,}5$. *Pri kojoj minimalnoj amplitudi će disk početi da klizi po ploči?*

B—2. *U dva suda za elektrolizu nalaze se rastvori* $CuSO_4$ *i* $AgNO_3$. *Sudovi su povezani serijski i njihovi otpori su* $R_1 = 13\ \Omega$ *i* $R_0 = 7\ \Omega$.

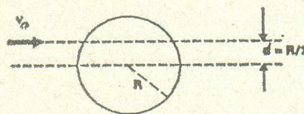


a) *Kako treba povezati* $N = 24$ *baterija elektromotornih sila* $e = 2$V *i unutrašnjih otpora* $r = 0{,}5\ \Omega$, *da bi se za vreme* $t = 10$ min *izdvojilo* $m_1 = 148{,}23$ mg *bakra?*

b) *Kolika masa srebra će se izdvojiti na katodi pri istim uslovima?*

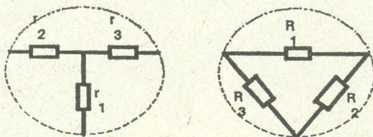
Elektrohemijski ekvivalent bakra je $k_1 = 0{,}3294$ mg/C. *Atomske mase bakra i srebra su* $M_1 = 63{,}55$ kg/kmol i $M_2 = 107{,}47$ kg/kmol.

B—3. *Iz protonskog akceleratora izlazi uski snop protona energije* $E = 2$ keV, *koji se usmerava na metalnu sferu poluprečnika R, ali tako, da se pravac ovog snopa nalazi na rastojanju* $d = R/2$ *od centra sfere. Akcelerator se nalazi*



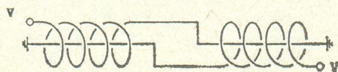
na velikom rastojanju od sfere. Koliki je maksimalan potencijal sfere posle dovoljno dugog rada akceleratora. Sfera pre početka rada akceleratora je elektroneutralna. Naelektrisanje elektrona je $1{,}6 \cdot 10^{-19}$C.

B—4. *Kakav uslov treba da zadovoljavaju otpori r_1, r_2, r_3, R1, R2, R3, da bi deo kola sa slike (a) bio ekvivalentan delu sa slike (b).*



Pri ovom uslovu zamena jednog dela drugim u proizvoljnim spolnjim uslovima ne dovodi do izmene struje i napona u delu kola van kruga.

B—5. *Uređaj na slici sastavljen je od dva jednaka dijela. Svaki dio sastoji se od dugačke zavojnice omskog otpora 2 Ω i supravodljive žice, koja je postavljena po osi zavojnice drugog dijela. Omski otpor ove supravodljive žice je nula u supravodljivom stanju, a 10 Ω u*



normalnom stanju. Ako je gustoća magnetskog toka (fluksa) u zavojnici veća od 10 mT, supravodič prelazi u normalno stanje i ponaša se kao običan vodič. Broj zavoja po jedinici duljine zavojnice je 10000 zavoja/m. U kom intervalu mora biti vrijednost napona V_0, tako da jedna žica bude u supravodljivom a druga u normalnom stanju?

C—1. *Direktna Sunčeva svetlost pada normalno na ekran i daje osvetljenost E_0. Kad se na rastojanju $l = 0{,}5$ m pred ekranom postavi tanko rasipno sočivo jačine $J = -4$ D, onda se na ekranu dobiju još dva polja sa osvetljenostima E_1 i E_0. Koliki je relativni odnos tih osvetljenja u odnosu na E_0?*

C—2. *Staklena cev unutrašnjeg radijusa r i spoljašnjeg radijusa R ($r < R$) napunjena je luminiscentnom tečnošću, koja pod dejstvom rentgenskog zračenja emituje zelenu svetlost. Indeks prelamanja stakla za zeleno svetlo je n_1, a tečnosti n_2. Kakav treba da bude odnos r/R da bi pri posmatranju cevi sa boka izgledalo kao da je debljina cevi jednaka nuli?*

C—3. *Monokromatska svetlost, talasne dužine λ_0, pada na tanak sloj ulja debljine $5\,\lambda_0$. Površina ulja postane tamna pri upadnom uglu od oko 35°. Da li se ovaj ugao može tačno da odredi? Kolika je njegova tačna vrednost? Brzina svetlosti u ulju iznosi $c = 200\,000$ km/s.*

C—4. *U Borovom modelu mionskog atoma, na udaljenosti r oko jezgre umjesto elektrona kruži mion mase $2{,}4 \cdot 10^{-28}$ kg i ima jednak naboj kao i elektron. Moment količine kretanja miona je $h/2\pi$. Procijeniti kolike vrijednosti redni broj Z može imati da bi postajao stabilni mionski atom, ako je radijus jezgre dat sa $R = R_0 Z^{1/3}$*

pri čemu je: $R_0 = 1{,}7 \cdot 10^{-15}$ m

$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js (*Plankova konstanta*)

$\varepsilon_0 = 8{,}854\ 10^{-12}$ As/Vm.

C—5. *Po Einsteinovoj općoj teoriji relativnosti, moramo Newtonoj gravitacijskoj sili između Sunca mase M i planeta mase m, koji se giba po kružnici radijusa r brzinom v, dodati popravku:*

$$6\,G\,M\,m\,v^2/(r^2\,c^2)$$

a) Pokaži, da se uzimanjem u obzir ove popravke izračunati period gibanja planeta promijeni za faktor:

$$1 - 3\,GM/\,(c^2\,r)$$

b) Ocijeni, za koliko će se razlikovati klasično izračunati put Merkura za 100 godina zbog ove popravke.

Masa Sunca je $2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg, *radijus Merkurove orbite, za koju pretpostavljamo da je kružnica, je* $5{,}8 \cdot 10^{10}$ m.

$$G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kgs}^2.$$

Ana Smontara
član Savezne komisije za mlade fizičare

[*Napomena*: Rješenja nekih zadataka predvividivo u narednim brojevima]

4. ljetna škola mladih fizičara

Ovogodišnja, četvrta po redu, Ljetna škola mladih fizičara održala se na Fakultetu elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje (FESB) u Splitu u vremenu od 24. do 30. svibnja 1987. Time se nastavio slijed započet u Preku 1984. i nastavljen u Splitu 1985. i 1986. godine. Ove škole pokrenulo je i organiziralo Društvo matematičara i fizičara SR Hrvatske, u suradnji i uz pomoć nekoliko institucija i radnih organizacija iz SR Hrvatske. Namjera organizatora bila je da prvenstveno učenicima srednjih škola s izraženim sklonostima za prirodne znanosti omogući što izravniji uvid u suvremeni razvoj i dostignuća fizike, i da time pospješi usmjeravanje mladih ljudi prema modernoj znanosti i tehnologiji.

Na ovogodišnjoj Školi čiji je naslov bio »Razvoj i dostignuća kvantne fizike« predavali su suradnici Instituta »Ruđer Bošković« iz Zagreba, Prirodoslovno-matematičkog fakulteta iz Zagreba i Elektrotehničkog instituta »Rade Končar« iz Zagreba. Teme predavanja uključivale su povijesne i suvremene aspekte kvantne teorije, posebno u fizici elementarnih

čestica, fenomenu supravodljivosti, novim materijalima i primjeni poluvodiča u elektrotehnici. Kao i prethodnih godina, polaznici su uz pohađanje predavanja izvodili laboratorijske vježbe, u čijoj suorganizaciji i provođenju sudjelovali suradnici FESB-a i Filozofskog fakulteta u Splitu.

U programu Škole sudjelovalo je pet predavača koji su u sveukupno oko 20 sati obradili slijedeće teme:

Nikola Cindro, Institut »R. Bošković«, Zagreb, Razlozi za kvantnu teoriju

Dubravko Tadić, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, Struktura elementarnih čestica

Slaven Barišić, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, Visokotemperaturna supravodljivost

Boran Leontić, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, Suvremeni materijali

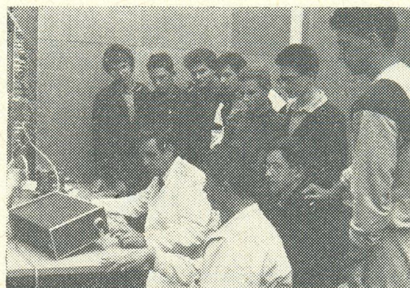
Zvonimir Benčić, Elektrotehnički institut »R. Končar«, Zagreb, Energetski poluvodički ventili

Uz navedena predavanja polaznici su, ovisno o tome kojoj su nastavnoj grupi pripadali, izvodili slijedeće vježbe iz fizike (pod vodstvom *Jadranke Vuletin*, FESB u Splitu i *Paška Županovića*, Filozofski fakultet u Zadru, OOUR prirodoslovno-matematičkih žnanosti i studija odgojnih područja u Splitu):

— Mjerenje jakosti gravitacijskog polja na površini Zemlje
— Napetost površine
— Stojni val na žici
— Mjerenje brzine zvuka interferencije pomoću Quinckeove cijevi
— Mjerenje horizontalne komponente Zemljinog magnetskog polja
— Mjerenje magnetskog dipolnog momenta magnetske igle
— Određivanje elektrokemijskog ekvivalenta bakra bakrenim kulonometrom
— Određivanje omjera e/m
— Fotoelektrični efekt
— Spektrometar
— Ovisnost otpora poluvodiča o temperaturi.

Predavanja *Zvonimira Benčića* također su bila popraćena praktičnim vježbama koje je vodio *Ljubo Kulišić*, FESB u Splitu.

Predavači pet navedenih tema, na molbu Organizacijskog odbora priredili su u pisanom obliku kratke sadržaje svojih predavanja. Organizacijski odbor te je tekstove objavio kao zbornik Škole, koji je umnožen zahvaljujući Službi ekonomske propagande SOUR-a »Rade Končar« i bio je dostupan svima zainteresiranim za sadržaj i rad škole.



Mr. Ljubo Kulušić sa polaznicima Škole, prilikom izvođenja vježbe vezane uz temu »Energetski poluvodički ventili«

Organizacijski odbor Škole je ove godine radio u sastavu:

Z. Benčić, SOUR »R. Končar«, Elektrotehnički institut, Zagreb
A. Bjeliš Institut za fiziku Sveučilišta u Zagrebu, (predsjednik)
M. Buljubašić, Prosvjetno-pedagoška služba, Split
I. Ilakovac, SOUR RIZ, Zagreb
K. Ilakovac, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb
A. Kuntarić, Prosvjetno-pedagoška služba, Zagreb
A. Martinović, Pokret »Nauku mladima« Narodne tehnike SRH
A. Smontara, MIOC »V. Popović«, Zagreb (tajnik)
E. Šuštar, MIOC »V. Popović«, Zagreb
J. Vuletin, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split
N. Zovko, Institut »R. Bošković«, Zagreb
P. Županović, Filozofski fakultet u Zadru, OOUR prirodoslovno-matematičkih znanosti i studija odgojnih područja, Split.

Organizaciju i održavanje ovogodišnje Škole omogućile su novčanom i drugim vidovima pomoći brojne institucije i radne organizacije:

— Elektrotehnički institut SOUR-a »Rade Končar«
— Služba ekonomske propagande SOUR-a »Rade Končar«
— SIZ za znanost SR Hrvatske
— SIZ usmjerenog obrazovanja u djelatnosti kulture i fizičke kulture SR Hrvatske
— SIZ usmjerenog obrazovanja u djelatnosti kemije, nafte i rudarstva SR Hrvatske
— SIZ usmjerenog obrazovanja u djelatnosti brodogradnje, metalurgije, elektrotehnike i elektroindustrije SR Hrvatske
— SOUR RIZ, OUR Tvornica poluvodiča, Zagreb
— Institut »R. Bošković«, Zagreb
— Institut za fiziku Sveučilišta, Zagreb

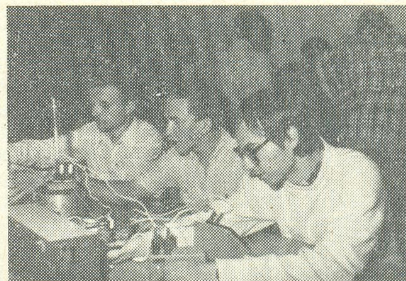
— Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb
— Elektrotehnički fakultet, Zagreb
— Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split
— Filozofski fakultet u Zadru, OOUR prirodoslovno-matematičkih znanosti i studija odgojnih područja u Splitu
— Brodogradilište »Split«, Split
— Savez SIZ-ova usmjerenog obrazovanja SR Hrvatske
— Zavod za prosvjetno-pedagošku službu, Split
— Pokret »Nauku mladima« Narodne tehnike SR Hrvatske
— »Matematičko-fizički list«, Zagreb
— MIOC »Vladimir Popović«, Zagreb
— Vojna ustanova »Dalmacija«, Split.

Glavninu Škole činilo je 62 učenika koji su se tokom protekle školske godine istakli u susretima mladih istraživača, natjecanjima iz fizike i drugim aktivnostima. Oni su Školi prisustvovali na osnovu poziva Organizacijskog odbora koji je pokrivao troškove njihovog boravka u Splitu.

Škola je također bila otvorena i četvorici učenika koje su njihovi centri predložili Organizacijskom odboru.

U Školi su prisustvovali na temelju poziva Organizacijskog odbora, slijedeći učenici:

Ozren Jakšić (Zagreb), *Miroslav Šilović* (Split), *Miran Božičević* (Zagreb), *Miran Mikšić* (Varaždin), *Krešimir Karamazen*, (Zagreb), *Zdravko Nežić* (Koprivnica), *Alen Selimbegović*, (Zagreb), *Miroslav Topolko* (Zagreb), *Marijan Kaštrun* (Zagreb), *Domagoj Prelošćan* (Sisak), *Mladen Galin* (Zagreb), *Davor Aničić* (Zagreb), *Radovan Zenter* (Zagreb), *Marijan Zdunić* (Zagreb), *Mario Pešut* (Zagreb), *Darko Sindelić* (Zagreb), *Davor Matić* (Zagreb), *Dubravka Donjerković* (Split), *Igor Matošić* (Split), *Nenad Mihailović* (Zagreb), *Siniša Vukojević* (Split), *Svjetlana Vrsalović* (Zagreb), *Alen Škugor* (Šibenik), *Damir Poljak* (Kardeljevo , *Dalibor Tužinski* (Slavonska Požega), *Elv s Pačelat* (Pula), *Darko Landek* (Kutina), *Robert Vujić* (Split), *Petar Maroević* (Split), *Natko Milin* (Zagreb), *Danko Zlokapa* (Pula), *Sebastian Skračić* (Zadar), *Ivan Cvitanović* (Kutina), *Darko Vilović* (Split), *Radovan Grmuša* (Rijeka), *Branka Tokić* (Zadar), *Vanja Dunjko* (Zagreb), *Damir Starešinić* (Zagreb), *Davor Jadrijević* (Zagreb), *Sergej Trišić* (Zagreb), *Aleksandra Cvrlje* (Zagreb), *Darko Pastorčić* (Zadar), *Dražen Zanchi* (Split), *Emil Kopjar* (Varaždin), *Ivan Hip* (Varaždin), *Mirjana Jurčević* (Zagreb)| *Višnja Katalinić* (Rijeka), *Nikola Šurdonja* (Zagreb), *Josip Jurić* (Slavonski Brod), *Krešimir Šparavec* (Zagreb), *Damir Stilinović* (Zagreb), *Zorislav Časar* (Beli Manastir), *Robertino Beniš*, (Zagreb), *Krešimir Štambuk* (Zagreb), *Konstantina Trbović* (Zagreb), *Jason Polić* (Zagreb), *Mislav Delić* (Zagreb), *Blaženka Čaušić* (Beli Manastir), *Siniša Murk* (Beli Manastir), *Oleg Šimić* (Beli Manastir); *Miloš Guzijan* (Zrenjanin), *Jadranka Glamočić* (Futog) — dva gosta MFL-a te učenici *Begić Goran* (Sisak), *Gorup Marcel* (Sisak), *Krišković Mladen* (Zagreb) i *Tot Gergeli* (Grubišno Polje), koje su predložili njihovi nastavnici odnosno njihovi centri, te pokrivali njihove troškove boravka u Splitu.



Sa desna prema lijevo: *Ivan Hip* (sudionik svih dosadašnjih škola), *Robertino Beniš* (sudionik posljednjih triju škola), *Krešimir Šparavec* prilikom izvođenja vježbe iz fizike

Voditelji učenika na ovogodišnjoj Školi bili su: *Pero Mikić*, prof. (Sisak), *Mladen Pantar*, prof. (Rijeka), i *Ivo Kvesić* (Zagreb). Oni su aktivno sudjelovali u radu Škole zajedno sa predavačima i neposrednim organizatorima: *Bjeliš Aleksom* (Zagreb), *Bulmubašić Mladenom* (Split), *Jadrijević Ankom* (Split) i *Smontara Anom* (Zagreb).

Što o proteklој Školi, tj. o proteklom sedmodnevnom druženju, u kojem se ni na trenutak nije moglo pobjeći od fizike, misle polaznici najbolje govore rezultati ankete koju su proveli organizatori na kraju Škole. Ne samo da je spektar tema Škole bio dobro odabran već su teme iznesene uravnoteženo po ocjeni većine polaznika. Među najzanimljivijim bile su: visokotemperaturna supravodljivost (što nije nerazumljivo između ostalog i zbog svoje aktualnosti za tehnologiju budućnosti) te elementarne čestice i razlozi za kvantnu teoriju. Predavanja na ostale teme pratili su također s podjednakom pažnjom, ističu polaznici.

Škola je jedan dobar dio polaznika više zainteresirala za fiziku kako, sami navode. Oni, kao i ostali, između ostalog predlažu da se nastoji, da predavanja budu popraćena demonstracijskim eksperimentima uz one teme uz koje je to moguće, da se laboratorijske vježbe (koje su i po njihovim mišljenju integralni dio programa svake škole) nastoje proširiti na one sa suvremenijem instrumentarijem i metodama, te da u radu škole sudjeluje više učenika iz drugih republika, tj. da škola postane saveznog karaktera.

A. Bjeliš i *A. Smontara*

24. savezno natjecanje mladih fizičara (1988)

Prema utvrđenom programu, Savezno natjecanje iz fizike u 1988. godini održat će se krajem maja u Zagrebu, u organizaciji Društva matematičara i fizičara SR Hrvatske.

Ono će se po prvi puta odvijati u dva nezavisna dijela, i to u:

a) eksperimentalnom i

b) numeričkom dijelu.

Eksperimentalni i numerički dio provodit će se u tri uobičajene grupe: A grupa: Mehanika i toplina, B grupa: Titranje i valovi. Elektricitet i magnetizam i C grupa: Optika, fizika atoma sa teorijom relativnosti, jer polaznici u centrima obrazovanja odgojno-obrazovnih struka u Jugoslaviji ostvaruju različite obaveze nastavnog programa fizike.

Novina u programu saveznog natjecanja je eksperimentalni dio, koji će se sastojati u rješavanju jednog tzv. eksperimentalnog zadatka. Odlika je eksperimentalnih zadataka da se unaprijed ne znaju podaci već se veličine za rješavanje zadatka dobivaju eksperimentom. Uz veličinu koja se traži u zadatku zadan je pribor kojim treba izvesti eksperiment. Natjecatelji trebaju u zadatku sami prepoznati fizikalnu pojavu i povezati je s traženom veličinom, utvrditi koje veličine treba poznavati za rješavanje zadatka, koji eksperiment treba izvesti i na koji način, te koja mjerenja treba izvesti da bi odredili nepoznatu veličinu.

Eksperimentalni dio će se odvijati nezavisno od uobičajenog numeričkog dijela i posebno će se valorizirati. Natjecatelji u pojedinoj grupi rješavat će isti eksperimentalni zadatak s temom vezanom uz sadržaj grupe u kojoj se natječu.

U namjeri da pomognemo učenicima i profesorima fizike u toku priprema za natjecanje, navodimo po nekoliko eksperimentalnih zadataka za pojedinu grupu:

A grupa — Mehanika, toplina

1. zadatak: Odredi atmosferski tlak.

Pribor: dvije staklene cijevi duljine 0,25 m i 0,8 m, gumena cijev duljine 1,5 m, gumeni čep, 2 stalka, 2 spojke, 2 hvataljke, čaša s vodom, mjerna traka (duljine 2 m).

Diskutiraj, što utječe na točnost mjerenja i rezultata!

2. zadatak: Odredite gustoću metala koji se nalazi u jednom od dva komada plastelina. Mase plastelina su jednake. Ocijenite točnost dobivenog rezultata. Metal se ne smije izvući iz plastelina.

Pribor: vaga s utezima, čaša s vodom, stalak, nit

3. zadatak: Odredite gustoću tvari od koje su načinjeni priloženi čavlići.

Pribor: posuda s vodom
epruveta
ravnalo
čavlići
čaša za vodu s kljunom (100 cm^3)
pomična mjerka
ubrusi

4. zadatak: Odredite konstantu elastičnosti zadane spiralne opruge.

Pribor: spiralna opruga, kuglica mase $m = 55g$ ravnalo duljine 1 m
odbojnik u obliku slova L
stezač
list bijelog papira
list kopirnog papira

B grupa — Titranje i valovi, elektricitet i magnetizam

1. zadatak: U crnim kutijama nalaze se električni elementi spojeni na izvode. Odredi koji su to elementi i koliki su po vrijednostima.

Pribor: dvije crne kutije, transformator s izvodom od 12 V, univerzalni instrument, voltmetar 0 V— 6 V za istosmjernu struju, baterija od 4,5 V, žice za spajanje

Napomena: Šant univerzalnog instrumenta (prekidač za mijenjanje mjeri nog područja) *ne smije se mijenjati* dok je zatvoren strujni krug.

2. zadatak: U »crnoj kutiji« nalaze se električni elementi spojeni na priključnice A, B, C i D. Odredite koji su to elementi, po kojoj shemi su spojeni i kolike su im vrijednosti.

Pribor: »crna kutija«, izvor istosmjerne struje, voltmetar, ampermetar, otpornik promjenljiva otpora, žice za spajanje

3. zadatak: Nacrtajte elemente i shemu prema kojoj su oni vezani u sklopu koji se nalazi u kutiji, te odredite vrijednosti otpora otpornika.

Pribor: baterija napona 4,5 V
miliampermetar do 100 mA
voltmetar do 6 V

4. zadatak:

a) Izmjerite kapacitet C_x elektrolitskog kondenzatora.

b) Obrazložite koji je dio mjerenja potrebno izvršiti relativno brzo ($t_{mjerenja} \leqslant 1$ min) i zbog čega. Obrazloženje potkrijepite i kvantitativnom računskom procjenom!

Upozorenje: Pri spajanju pazite na polaritet elektrolitskih kondenzatora! Negativno označena elektroda elektrolitskog kondenzatora mora se spojiti na negativni pol baterije, jer se u protivnom može uništiti elektrolitski kondenzator.

Pribor: kutija s elektrolitskim kondenzatorom poznatog kapaciteta $C = 4{,}74$ mF, te otpornik od 22 Ω koji se serijski spaja s kondenzatorom
izvor isosmjernog napona (plosnata baterija nominalnog napona 4,5 V)
izmjenični prekidač
5 komada žica s banana-utikačima koji imaju kružni otvor za dodatni spoj
3 krokodil-štipaljke
voltmetar unutarnjeg otpora R_v s priključnim žicama
kutija s elektrolitskim kondenzatorom nepoznatog kapaciteta

C grupa — Optika, fizika atoma i teorija relativnosti

1. zadatak: Pomoću zadanog sistema koji se sastoji od plankonveksne staklene leće i planparalelne staklene ploče odrediti indeks loma nepoznate tekućine, ako je poznat indeks loma vode $n = 1{,}332$.

Pribor: sistem od plankonveksne leće i planpa alelne ploče, krojačko mjer lo, žaruljica s postoljem, baterija od 4,5 V, komad bijelog kartona, čaša s vodom, bočica s tekućinom nepoznata indeksa loma

2. zadatak: Pomoću zadanih dviju leća složite na ravnalu optički sistem koji će povećavati neki udaljen predmet promatran kroz prozor. Odredite povećanje sistema teorijski i eksperimentalno ga provjerite. Eksperimentalnu provjeru povećanja možemo izvršiti istovremenim promatranjem predmeta (jednim okom) i slike (drugim okom).

Pribor: Konvergentna leća, divergentna leća, mjerna vrpca, zastor, žaruljica, izvor struje, ravnalo, plastelin.

3. zadatak: Dana je »optička crna kutija« koja se sastoji od dvije debele planparalelne, međusobno paralelne i razmaknute staklene ploče. Ne rastavljajući kutiju, odredite ukupnu debljinu obje ploče, ako je staklo indeksa loma $n = 1{,}50$.

Pribor: zadana crna kutija
podloga od stiropora ili pluta
papir
pribadače
ravnalo
kutomjer

4. zadatak: Odredi indeks loma nepoznate tekućine. Diskutiraj pogreške mjerenja i moguće sistematske pogreške!
Zadan je volumen tekućine V, a indeks loma stakla je $n = 1{,}5$.

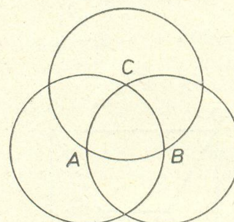
Pribor: nepoznata tekućina natočena »do nivoa kugle« i zatvorena u okrugloj tikvici
list A—3 milimetarskog papira
list kartona A—4
baterija i žaruljica na stalku
škarice za rezanje
mali kolut samoljepljive trake

Ana Smontara

Nekoliko zanimljivih matematičkih zadataka

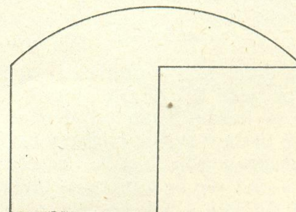
145. *Mogu li se naći dva broja koji imaju svojstvo da su njihov zbir, njihov proizvod i njihov količnik međusobno jednaki?*

146. *Da li je figura, ograničena lucima AB, BC i CA, veća ili manja od četvrtine svakog od nacrtanih krugova?*



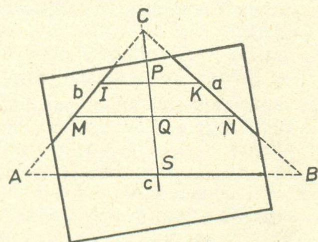
147. *Neka je $\overline{abcdef}$ nekakav šestocifren broj koji je djeljiv sa jednim ili sa nekoliko od brojeva 7, 11, 13, i 37. Ako se prva cifra ovog broja prenese na mesto iza njegove poslednje cifre, dobija se broj koji je deljiv sa onim istim od 4 navedena broja, kojima je deljiv i sam dati broj. Dokazati.*

148. *Figuru, predstavljenu na slici treba raseći na dva podudarna dela.*



Rešenja iz prošlog broja (4/151)

141. Konstruišu se duži IK i MN, paralelne sa pravom c, i odrede njihova središta P i Q.



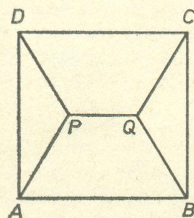
Prava PQ preseca duž c u tački S, koja je jednako udaljena od tačaka A i B.

142. Ujedinjujući parove brojeva a i $(10^n - 1 - a)$ datog niza, konstatujemo da je zbir cifara svakog takvog para $9n$. Broj parova je $10^n/2$. Znači, tražena suma je $9n \cdot 10^n/2$.

143. Odredimo u kvadratu $ABCD$ tačke P i Q tako da je $\sphericalangle ADP = \sphericalangle DAP = \sphericalangle BCQ = \sphericalangle CBQ = 30°$. U tom slučaju je:

$$AP = BQ = CQ = DP = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$PQ = 2 - 2\frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Usled toga je

$$s = AP + BQ + CQ + DP + PQ:$$

$$4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2(1 + \sqrt{3}) \approx$$

$$\approx 5{,}4642.$$

144. Iz datih uslova proizilazi: a) da treći takmičar u tačke B i C nije mogao stići istovremeno sa jednim istim od dvojice drugih takmičara; b) da je svoju prvobitnu brzinu kretanja promenio u tački C; c) da je odsečke $AB = c$, $BC = a$ i $CA = b$ pretrčao brzinama od 12, 12 km/h i 14 km/h.

S obzirom na to, dobijamo jednakosti:

$$\frac{c}{10} + \frac{a}{16} + \frac{b}{14} = \frac{c}{12} + \frac{a}{10} + \frac{b}{16} = \frac{c}{12} + \frac{a}{12} + \frac{b}{14},$$

iz kojih proizilazi da je

$$c = \frac{5}{4}a, \; b = \frac{28}{15}a.$$

Kako je, pri tom,

$$\frac{5}{4} < \frac{28}{15}, \quad \text{sledi:}$$

$b > c > a$, a na osnovu toga što je uz to još i $b^2 > c^2 + a^2$, zaključuje se da je trougao ABC tupougli trougao, sa tupim uglom kod temena B.

P. D.

[**Ispravak.** U rješenju 138. zadatka (br. 4/151, str. 143) zabunom je izostavljen broj 76. *Ur.*]

Da li znate?

1. *Kako glasi tzv. »Puasonov zadatak«?*

2. *Koji se prosti brojevi nazivaju »Fermaovi prosti brojevi«?*

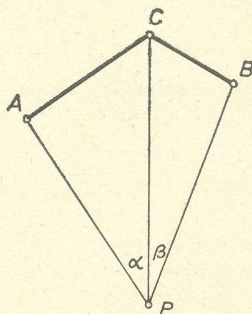
3. *U čemu se sastoji »Potenotov problem«?*

Odgovori

1. Postoji anegdota da se značajni francuski matematičar Puason (*S. Poisson*, 1781—1840) zainteresovao za matematiku i počeo baviti njom tek kad je kao dečak naišao na sledeći zadatak: »Vino iz punog suda od 12 pinti (pint — mera za tečnost) treba podeliti na dva jednaka dela samo uz upotrebu dva prazna suda, i to jednog od 8 pinti i drugog od 5 pinti«. Zbog toga je ovaj zadatak kasnije prozvan »Puasonov zadatak«. [Čitaocima: Pošaljite rešenja. Jedno najkraće rešenje biće nagrađeno.]

2. Znameniti francuski matematičar Ferma (*P. Fermat*, 1601—1666) tvrdio je da svaki broj oblika $2^{2^n} + 1$, $n \in N$ prost broj. Međutim, do sada je dokazano da je to tačno samo za $n = 0, 1, 2, 3, 4$, dok je već Ojler utvrdio da za $n = 5$ ovaj broj nije prost! $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297$ deljiv je sa 641. Da li među brojevima ovog oblika za $n > 5$ postoji još koji prost broj, do danas nije utvrđeno.

3. »Potenotov problem« se sastoji u zahtevu da se nađe tačka u ravni iz koje se jedna data duž (AC) vidi pod uglom α, a druga data duž (CB) vidi pod uglom β. Do toga dolazi, na primer, kada treba odrediti položaj broda P na moru sa kojeg se vide tri tačke A, B i C, zabeležene na geografskoj karti, i to tako da je $\sphericalangle APC = \alpha$ i $\sphericalangle BPC = \beta$.



Ovaj se problem rešava grafički vrlo lako, ali se zbog menogućnosti sasvim tačnog merenja na karti tako dobijaju uvek samo približni rezultati. Za njegovo tačno rešavanje potrebno je i poznavanje trigonometrije; a od svih nađenih rešenja najpoznatije je ono koje je dao matematičar Potenot (*L. Pothenot*, umro 1732), pa je po njemu ovaj problem i dobio svoje ime. Međutim, ustanovljeno je da se problem prvi put pojavio 1621, u jednom radu Snelijusa (*V. Snellius*).

P. D. — M. K.

Takmičenje iz matematike srednjoškolaca SR Srbije, 1987.

29. republičko takmičenje iz matematike učenika srednjih škola SR Srbije održano je u Aranđelovcu 28. 03. 1987. Organizator je, izuzetno uspešno, bio VOC »Miloš Savković« uz pomoć radnih organizacija Aranđelovca. Na takmičenju je učestvovalo 252 učenika, a najuspješniji su bili *Vanja Dunjić* (I razred), *Zvonimir Bandić* (II razred), *Aleksandra Smiljanić* (III razred) i *Olivera Milenković* (IV razred) — svi učenici Matematičke gimnazije »Veljko Vlahović« iz Beograda. Najbolji takmičari su nagrađeni, a na osnovu rezultata određena je i ekipa za Savezno takmičenje.

Zadaci

I—1. *Naći sva celobrojna rešenja jednačine*

$$xy = x + y + 1$$

I—2. *Dokazati da za sve prirodne brojeve n važi nejednakost*

$$n^n \geqslant 2^{n-1} \cdot n!$$

I—3. *Na zidovima časovničarske radnje nalazi se 1987 uvek tačnih satova. Dokazati da za svaku tačku M u unutrašnjosti radnje postoji trenutak kada je zbir rastojanja te tačke do centaara svih satova manji od zbira rastojanja tačke M do vrhova svih minutnih kazaljki.*

I—4. *Koliko ima permutacija brojeva* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 *takvih da jedinica nije na prvom mestu, dvojka nije na jednom od prva dva mesta i trojka nije na jednom od prva tri mesta?*

I—5. *Petougao ABCDE ima jednake stranice, a za njegove uglove važi*

$$\angle A \geqslant \angle B \geqslant \angle C \geqslant \angle D \geqslant \angle E.$$

Dokazati da je petougao pravilan.

II—1. *Neka je a — prirodan broj takav da a^{1987} daje ostatak* 4 *pri deljenju sa* 5. *Naći ostatak koji pri deljenju sa* 5 *daje broj a.*

II—2. *Dokazati da za svaki pozitivan broj x važi*

$$[\sqrt{[\sqrt{x}]}] = [\sqrt{\sqrt{x}}].$$

($[t]$ je najveći ceo broj $\leqslant t$)

II—3. *Neka je* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *(a, b, c, x — realni brojevi). Ako za* $|x| \leqslant 1$ *važi* $|f(x)| \leqslant 1$, *dokazati da za* $|x| \leqslant 2$ *važi* $|f(x)| \leqslant 7$.

II—4. *Osmougao* $A_1 A_2 A_3 \ldots A_8$ *je upisan u krug i važi* $A_1 A_2 \parallel A_5 A_6$, $A_2 A_3 \parallel A_6 A_7$, $A_3 A_4 \parallel A_7 A_8$.

Dokazati da je $A_8 A_1 \cong A_4 A_5$.

II—5. *Dat je tetraedar ABCD čije su strane podudarni trouglovi sa stranicama a, b, c. Izračunati zapreminu oktaedra čija su temena središta ivica datog tetraedra.*

III—A—1. *Neka je n prirodan broj i α, β i γ uglovi trougla. Dokazati da je*

$$\operatorname{ctg}^n \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^n \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}^n \frac{\gamma}{2} \geqslant 3^{\frac{n+2}{2}}.$$

III—A—2. *Dat je tetivan četvorougao ABCD. Neka su K, L, M i N, redom, podnožja normala iz preseka S dijagonala AC i BD na prave AB, BC, CD i DA. Dokazati da se u četvorougao KLMN može upisati krug.*

III—A—3. *U prostoru su date prava p i tačke A i B, tako da su prave AB i p mimoilazne. Ako su tačke A i B podjednako udaljene od prave p, dokazati da zajednička normala pravih AB i p polovi duž AB.*

III—A—4. *Koliko ima n-tocifrenih prirodnih brojeva čiji je zbir cifara jednak* 11?

III—A—5. *Data je petorka* (1, 2, 3, 4, 5). *Novu petorku formiramo tako što proizvoljne četiri koordinate stare petorke, označimo ih sa x, y, z i t, zamenimo brojevima*

$$\frac{1}{2}(x+y+z-t),\ \frac{1}{2}(x+y-z+t),$$

$$\frac{1}{2}(x-y+z+t),\ \frac{1}{2}(-x+y+z+t).$$

Da li se višestrukim ponavljanjem ovog postupka može dobiti petorka:

a) $(-1, 3, 5, 7, 9)$; b) $(0, 2, 3, 4, 6)$?

III—B—1. *isti kao* III—A—1.

III—B—2. *isti kao III—A—2.*

III—B—3. *Dokazati da sistem jednačina*

$$|x| + |y| = 1$$

$$ax + by + c = 0$$

nema rješenja ako i samo ako su svi brojevi $c+a$, $c-a$, $c+b$, $c-b$ *istog znaka.*

III—B—4. *isti kao III—A—4.*

III—B—5. *isti kao III—A—5.*

IV—1. *Neka su nule* x_1, x_2, x_3 *polinoma* $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ *pozitivne. Dokazati da je* $b^2 = 3ac$ *ako i samo ako je* $x_1 = x_2 + x_3$.

IV—2. *isti kao III—A—2.*

IV—3. *Naći maksimalnu površinu ortogonalne projekcije pravilnog tetraedra ivice a na ravan* π.

IV—4. *isti kao III—A—4.*

IV—5. *isti kao III—A—5.*

Neka **rešenja**

I—4. Trojku možemo staviti na jedno od poslednjih 6 mesta, dvojku na jedno od poslednjih 7 mesta na kome nije trojka (6 mogućnosti), jedinicu na jedno od posljednjih 8 mesta na kome nisu ni dvojka ni trojka (6 mogućnosti). Preostale brojeve rasporedimo na slobodna mesta. Tako je broj traženih permutacija

$$6\cdot 6\cdot 6\cdot 6! = 155520.$$

II—3. *Prvo rešenje.* Dovoljno je dokazati da za $|x| \leqslant 1$ važi $|f(2x)| \leqslant 7$.

$$|f(2x)| = |4ax^2 + 2bx + c| \leqslant |ax^2 + bx + c| + |3ax^2 + bx| = |f(x)| + |x|\,|3ax + b| \leqslant 1 + |3ax + b|.$$

Funkcija $|3ax + b|$ najveću vrednost dostiže u jednom od krajeva intervala, pa je dovoljno pokazati $|3a + b| \leqslant 6$.

$$|3a + b| = |2f(1) + f(-1) - 3f(0)| \leqslant 2 + 1 + 3 = 6.$$

$$|3a - b| = |f(1) + 2f(-1) - 3f(0)| \leqslant 1 + 2 + 3 = 6.$$

Drugo rešenje: Dovoljno je dokazati da za $|x| \leqslant 1$ važi $|f(x+1)| \leqslant 7$.

$$|a \pm b| = |f(\pm 1) - f(0)| \leqslant |f(\pm 1)| + |f(0)| \leqslant 2$$

$$|a| = \frac{1}{2}|f(1) + f(-1) - 2f(0)| \leqslant \frac{1}{2}(1 + 1 + 2) = 2$$

$$|f(x \pm 1)| = |ax^2 + bx + c \pm 2ax + a \pm b| \leqslant |f(x)| + 2|a|\,|x| + |a + b| \leqslant 1 + 2\cdot 2\cdot 1 + 2 = 7.$$

Treće rešenje. Funkcija $f(x)$ najveću vrednost dostiže na jednom od krajeva intervala ili u temenu parabole $y = f(x)$.

$$|f(\pm 2)| = |4a \pm 2b + c| \leqslant |a \pm b + c| + |3a \pm b| \leqslant 1 + 6 = 7.$$

Pretpostavimo da je teme parabole $y = f(x)$ u intervalu $[-2, 2]$. Tada je $\left|-\frac{b}{2a}\right| \leqslant 2$, odnosno $\left|\frac{b}{4a}\right| \leqslant 1$, pa je

$$\left|f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right| = \left|\frac{b^2}{4a} - c\right| \leqslant \left|\frac{b^2}{4a}\right| + |c| \leqslant \left|\frac{b}{4c}\right|\,|b| + |c|.$$

$$|b| = \frac{1}{2}|f(1) + f(-1)| \leqslant 1$$

$$\text{i} \quad |c| = |f(0)| \leqslant 1,$$

pa imamo

$$\left|f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right| \leqslant \left|\frac{b}{4a}\right|\cdot|b| + |c| \leqslant 1\cdot 1 + 1 = 2.$$

III—A—1. Lako se dokazuje da za uglove trougla važi jednakost

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Kako je $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i ctg je pozitivna funkcija na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, to na osnovu nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine dobijamo

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + $$

$$+ \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} \geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$$

pa sledi

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} \geqslant 3^{3/2}.$$

Dalje je

$$\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^n\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}^n\frac{\gamma}{2} \geqslant$$

$$\geqslant 3\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)^{n/3}$$

pa lako dobijamo

$$\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^n\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}^n\frac{\gamma}{2} \geqslant 3^{\frac{n+2}{2}}.$$

Jednakost važi ako i samo ako je $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, tj. $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ (jer je ctg monotona funkcija na intervalu $(0, 2\pi)$).

Drugo rešenje. Iz $(\operatorname{ctg}^n x)'' = n(n-1)\operatorname{ctg}^{n-2} x \cdot \frac{1}{\sin^4 x} + 2n\operatorname{ctg}^{n-1} x \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x} > 0$ za svako $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i svako $n \in N$, sledi da je $\operatorname{ctg}^n x$ konveksna funkcija na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Primenom Jensenove nejednakosti dobijamo

$$\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^n\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}^n\frac{\gamma}{2} = 3\left(\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^n\frac{\beta}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^n\frac{\gamma}{2}\right) \geqslant 3\operatorname{ctg}^n\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\cdot\frac{\beta}{2} + \frac{1}{3}\frac{\gamma}{2}\right) = 3\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6} =$$

$$= 3\operatorname{ctg}^n\frac{\pi}{6} = 3^{\frac{n+2}{2}}.$$

IV—1. Na osnovu Vietovih formula dobijamo

$$a = -(x_1 + x_2 + x_3),\ b = x_1 x_2 + $$

$$+ x_2x_3 + x_3x_1,\quad c = -x_1x_2x_3$$

odakle sledi

$$b^2 - 2ac = x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 \geqslant x_1x_2^2x_3 +$$

$$+ x_2x_3^2x_1 + x_3x_1^2x_2 = ac.$$

Dakle $b^2 \geqslant 3ac$, a jednakost važi ako i samo ako je $x_1x_2 = x_2x_3 = x_3x_1$, tj. $x_1 = x_2 = x_3$.

Srđan Ognjanović

NOVE KNJIGE

M. Paić: Osnove fizike II (Toplina — termodinamika — energija). Izd. Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1987, str. 356. [Može se nabaviti u skriptarnici PMF-a, Marulićev trg 19, cijena 2937 dinara.]

Nakon prvog dijela »Osnova fizike« u kojima akademik profesor *Mladen Paić* iznosi razmatranja o gibanju, silama i valovima, nedavno izišlim drugim dijelom »Toplina, termodinamika, energija« autor čini slijedeći korak u izuzetno vrijednoj predstavi temeljnih zakona fizike. Okosnicu i ovog dijela čine predavanja prof. Paića na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Detaljnim razrazmatranjem osnovnih pojmova nauke o toplini, diskusijom agregatnih stanja materije, jednadžbe stanja plinova, zakona zračenja i tertodinamike uz prezentiranje niza modernih metoda i primjene iz fizike čvrstog stanja, autor jasno pokazuje put ka shvaćanju prirodnih zakona: opažanjem, pokusom, razmišljanjem i zaključivanjem. Dotaknuvši mikroskopske aspekte termodinamike, zračenja, pojma negativne termodinamičke temperature, autor daje odgovor na mnoga pitanja iz klasične fizike sa stajališta suvremene kvantne fizike, naglašavajući tako jedinstvo fizikalnih pojava bilo da se dešavaju u mikro- ili makro-svijetu.

Logički slijed izložene građe uz jednostavan rječnik zasigurno motivira mladog čitaoca na dublje priлаženje i bolje razumijevanje fizikalnih zakonitosti. Kao primjer istaknuo bih diskusiju osnovnih zakona termodinamike, svojstva reverzibilnih i ireverzibilnih procesa, uvođenja pojma cntropije, gdje autor na neposredan i slikovit način izlaže suštine pojava potkrijepljujući to nizom primjera i opisanih pokusa.

Posebno obilježje ove knjige je da pored diskusije termodinamičkih osnova konvencionalnih pretvarača energije (toplinske u mehaničku i obratno) daje sistematizaciju nekonvencionalnih pretvarača energije (energije Sunčevog zračenja, energije vjetra, plime i oseke itd. u mehaničku ili električnu) te je tako vrijedna ne samo u znanosti nego i u tehnologiji.

Knjiga »Osnove fizike« akademika M. Paića obiluje nizom primjera iz svakodnevnog života te je zanimljiva i korisna ne samo studentima fizike nego i svima onima koji žele upoznati osnovne zakonitosti koje vladaju u urirodi.

dr. Željko Crljen

Riješili zadatke iz br. 3/150

(Broj u zagradi označuje razred-godište srednje škole; redni broj riješenog zadatka »skraćen« je na desetice i jedinice.)

Iz matematike: *Ajduković Stipe* (1), Sinj, 51, 56, 58, 62, 64; *Andrijić Silvija* (1), Sarajevo, 52, 56, 59, 62, 64; *Avdalović Vesna* (3), Mostar, 51, 52, 55—62, 64; *Babić Živomir* (3), Banjaluka, sve; *Bailović Dragoje* (2), Foča, 52, 54—58, 61—64; *Bašić Dejan* (3), Trebinje, sve; *Borovina Nihad* (2), Foča, sve osim 60; *Bručić Goran* (1), Varaždin, 53, 54, 58; *Buljan Senko* (3), Sinj, 51, 53, 55, 56, 61, 62; *Buljubašić Ajdin* (1), Sarajevo, 51, 53, 59; *Bunjaku Fatos* (3), Titova Mitrovica 52, 54, 56, 58, 61; *Čevizović Dalibor* (2), Podr. Slatina, 51, 53, 56, 59, 64; *Čuturić Lazar* (2), Ugljevik, 52—55, 58; *Ćerimagić Asim* (1), Foča, 53, 54, 56, 58, 62; *Ćerimagić Fehim* (1), 52—54, 56; *Davidović Nedeljko* (1), Foča, 52, 54, 58; *Dedović Edina* (3), Foča, 51, 52, 54—56, 58—64; *Dejanović Alen* (2), Prijedor, 52, 54, 57, 59, 61, 62; *Devčić Željko* (3), Slav. Požega, 53—57, 59, 62, 64; *Drinić Evelin* (1), Banjaluka, 51, 52, 54, 55, 58, 59, 62, 64; *Đurković Zvjezdan* (2), Ugljevik, 52—55, 58; *Filipović Davorka* (2), Beli Manastir, 53, 55, 56, 61, 63; *Gajić Bojana* (2), Sarajevo, 51—57, 59; *Grujičić Ivan* (2), Foča, 54, 55, 61, 62; *Gubi László* (3), Subotica, 51, 53, 55—57, 62; *Gudelj Ivan* (2), Sinj, 51, 54, 56, 59, 62, 64; *Guvo Miroslav* (3), Sinj, 53, 55, 56, 62, 63; *Hasanić Samin* (2), Foča, 55, 58, 61—64; *Huskanović Almir* (3), Tešanj, 51, 53, 55, 56, 58, 61, 62; *Ilišević Dijana* (1), Beli Manastir, sve osim 60; *Ivanović Stanislav* (2), Foča, sve osim 57; *Javor Igor* (3), Prijedor, 51—55, 57, 59; *Jerman Marjan* (2), Trbovlje, 51—53, 56, 57, 59, 64; *Jocić Aleksandar* (3), Foča, sve; *Jovanović Biljana* (3), Knjaževac, 51, 52, 54—56, 61—64; *Kabashi Gazmend* (3), Srbica, 51, 56, 57 ,59, 61, 62; *Kalajac Enes* (2), Živinice, 53, 55, 59, 61, 62; *Katavić Vedran* (1), Sinj, 51, 52, 58, 59; *Katić Mirela* (3), Zagreb, sve osim 63; *Klinac Vahid* (2), Foča, 52, 54, 5 8, 61—64; *Kliškinić Zlatko* (1), Prijedor, 52—54; *Kovačević Svetislav* (2), Foča, 52—58, 61, 62, 64; *Krolo Dina* (1), Sinj, 53, 56, 58; *Kukovičić Suzana* (3), Titovo Velenje, 51—54, 56, 57, 59—64; *Laci Vesna* (3), Varaždin, sve osim 63; *Levajac Nataša* (4), Banjaluka, 51, 52, 54—56, 58, 59, 61—63; *Malović Davor* (3), Karlovac, 51, 53, 55, 56, 60, 64; *Marasović Ivana* (3), Sinj, 51, 53, 56, 61—63; *Marković Milovan* (4), Smed. Palanka, 54—59, 62; *Maroević Nada* (1), Split, 51, 56, 64; *Medan Ninoslav* (2), Tuzla, 51—59, 61, 64; *Medvid Boris* (3), Sinj, 51—59, 61—63; *Mehmedović Tarik* (3), Tuzla, 55, 56, 61—64; *Mićić Aleksandar* (2), Banjaluka, 51—59, 61—63; *Mijatović Anđa* (OŠ), Kneževo, 51—54; *Milanović Angela* (3), Sinj, 53, 55, 56, 58, 61—63; *Miletić Predrag* (3), Foča, sve osim 59; *Mitić Ljiljana* (1), Pančevo, 51—54, 59, 62; *Mitreski Slobodan* (2), Pančevo, 51—54, 56, 57, 61, 62; *Modrić Ante* (3), Sinj, 53, 55, 61—63; *Muratović Midhat* (2), Tuzla, 58, 59, 62; *Nikolin Bojana* (2), Pančevo, 51—57, 59, 61; *Odobašić Mensud* (2), Foča, 52, 54, 55, 58, 61; *Omerdić Emir* (2), Tuzla, 51—59, 61, 64; *Ostović Anđelko* (1), Foča, 51—59, 64; *Paar Dalibor* (3), Zagreb, 51, 53, 54, 56, 58—64; *Parezanović Radomir* (2), Nikšić, 51, 59, 63; *Pešić Marina* (4), Zrenjanin, 51—56, 58, 59, 62; *Pokrajac Dragoljub* (2), Niš, sve; *Poljak Ljiljana* (2), Sinj, 51—59, 61—63; *Popov Jooica* (1), Zrenjanin, 51, 53, 54, 56, 59; *Prcać Sanda* (3), Prijedor, 52—55, 62; *Radović Zdravko* (2), Foča, sve osim 64; *Ramadani Ylber* (2), Priština, 57—59, 61—64; *Rizvanović Etida* (2), Prijedor, 52, 54, 58, 59, 61, 62; *Rupnik Saša* (3), Varaždin, 51, 53, 55, 56, 59, 61, 64; *Selimbegović Alen* (1), Zagreb, 51, 52, 54, 59, 63; *Slačala Dejan* (1), Prijedor, 51, 53, 54, 58, 64; *Smajlović Nedžiba* (1), Foča, 52—54; *Sokolović Jovan* (2), Pirot, sve sem 64; *Spremo Aleksandar* (2), Sipovo, 51, 53, 56; *Subašić Emir* (3), Zenica, 51—53, 55, 57, 59—64; *Subašić Mirsad* (1), Zenica, 51—54, 59; *Šćulac Marija* (2), Slav. Požega, 53—55, 64; *Šekara Saša* (3), Pale, 51, 52, 54—56, 58, 59, 61—63; *Šekara Siniša* (3), Pale, 51, 52, 54—56, 58, 59, 61—63; *Šermić Rastko* (2), Beograd, 51, 52, 55, 56, 58—63; *Škripina Aleksandar* (1), Foča, 51, 56, 62, 64; *Škrtić Mario* (2), Karlovac, 51, 53—56, 59, 60, 62, 63; *Šterman Mitja* (3), Nova Gorica, 52, 53, 56, 59, 62, 63; *Tabaković Dario* (2), Banjaluka, 51—56, 58—62; *Tabučić Dževad* (2), Foča, sve osim 60; *Tafro Arjana* (1), Foča, 51—54; *Tambača Josip* (2), Šibenik, 51—56, 58—60, 62, 64; *Tokić Branka* (3), Zadar, 51, 53—56, 59, 62, 64; *Tošić Stevan* (2), Podr. Slatina, 52, 53, 55, 56; *Tužinski Dalibor* (2), Slav. Požega, sve; *Vilibić Ivica* (3), Split, sve; *Vlajčević Robert* (2), Sinj, 51—56, 58, 62; *Vučinić Borika* (4), Trebinje, 52, 53, 56, 58, 61, 62; *Vučković Jelena* (2), Niš sve; *Živanović Danijela* (1), Kikinda, 51, 54, 59; *Абрамовић Слободан* (1), Жагубица, 51—53, 59, 62; *Атанасов Љупчо* (ОШ),Кавадарци,51—54, 58, 62; *Атанасов Ристе*, (3) Кавадарци, 51—56, 58, 59, 61—63; *Васић Лепа* (1), Жагубица, 51—53, 59, 62; *Гацовски Зоран* (2), Кавадарци, 53, 54, 56; *Јевтић Драгица* (3), Велика Плана, 56, 58, 59, 62, 63; *Крстић Љиљана* (2), *Прокупље*, 56, 59, 62; *Манић Драган* (2), Пирот, 51——56, 58—63; *Марић Драган* (3), Крушевац, све сем 64; *Маринова Весна* (3), Битола, све; *Матић Саша* (1), Крушевац, 51, 52, 56, 62; *Милићевић Јасмина* (2), Крушевац, 51—54, 56, 58,60; *Мирчески Тони* (2), Скопје, 51—53, 64; *Најнер Анђелка* (3), Велика Плана, 58, 59, 61—63; *Нинески Рубинчо* (1), Скопје, 51—53; *Обрадовић Милан* (3), Нови Сад, 51—58, 60—63; *Пенокић Јасмина* (1), Жагубица, 51—53, 59, 62; *Петровић Синиша* (3), Вршац, 53, 55, 56, 61, 62; *Попов Марјан* (4), Кавадарци, 52, 55—59, 61—62; *Тодоровић Драгана* (1), Жагубица, 51—53, 59, 62; *Трајковић Мирослав* (2), Ниш, 51, 52, 54—59, 61, 62.

Rezultati nagradnog natječaja br. 103

Zadatak je glasio:
Naći sve trocifrene brojeve $\overline{abc}$ ($a \neq b \neq c \neq a$) za koje vrijedi

$$a^2 - b^2 - c^2 = a - b - c.$$

Rješenje A:
Uslov možemo napisati u obliku

$$a(a-1) = b(b-1) + c(c-1)$$

odakle lako zaključujemo da je $1 < b, c < a$.
Brojevi 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72 su svi brojevi koji su proizvod dva susjedna prirodna broja, manja od 10. Lako provjeravamo da se samo dva broja u ovom nizu mogu predstaviti kao zbir prethodna dva. To su brojevi

$$72 = 42 + 30 \text{ i } 42 = 30 + 12$$

ili

$$9 \cdot 8 = 7 \cdot 6 + 6 \cdot 5 \text{ i } 7 \cdot 6 = 6 \cdot 5 + 4 \cdot 3.$$

Dakle, svi traženi brojevi su:

976, 967, 764, 746.

Dejan Bašić (3), Trebinje

Rješenje B:
Zadatak sam riješio na programskom jeziku PASCAL na računalu Commodore-128. Program se sastoji od petlje u kojoj se provjerava za sve troznamenkaste brojeve (od 100 do 999) da li zadovoljavaju traženi uvjet. Način ispitivanja je slijedeći: Cjelobrojnim varijablama a, b, i c pridružuju se prva, druga i treća znamenka troznamenkastog broja korištenjem funkcije TRUNC koja odvaja cijeli dio realnog broja. Nakon toga provjeravamo pomoću uvjetne IF-THEN naredbe da li znamenke a, b i c zadovoljavaju uvjet $a^2 - b^2 - c^2 = a - b - c$. Ukoliko je to istina provjerava se uvjet $a \neq b \neq c \neq a$ te se, ako je i taj uvjet ispunjen, ispisuje rezultat.
Program je dao 4 rješenja. To su brojevi 746, 764, 967 i 976.
Lista programa:

```
PROGRAM MFL (output);
VAR a, b, c, i: integer;
BEGIN
    FOR i: = 100 TO 999 DO
                BEGIN
                   a: trunc (i/100);
                   b: trunc (i/10) - a * 10;
                   c: = i - b * 10 - a * 100;
                   IF sqr (a) - sqr (b) - sqr (c) = a - b - c THEN
                               IF (a <> b) AND (b <> c) AND (a <> c) THEN
                                  writeln (i)
                   END;
END.
```

Dalibor Paar (3), Zagreb

Primljeno je 77 rješenja. Raznim knjigama nagrađeni su:
1. *Bašić Dejan* (3), Trebinje; 2. *Janković Dragan* (4), Zaječar; 3. *Király Ferenc* (2), Lendava; 4. *Ogrizović Vukan* (?), Vršac; 5. *Osipov Boris* (?), Sarajevo; 6. *Ozbič Tatjana* (2), Postojna; 7. *Paar Dalibor* (3), Zagreb; 8. *Penčić Miodrag* (4), Pirot; 9. *Pjevalica Velibor* (3), Novi Sad; 10. *Pučić Dženis* (2), Novi Pazar.

Nagradni natječaj br. 105

U jednakosti

$$\frac{1}{4865} = \frac{2}{9730}$$

dvaju pozitivnih pravih razlomaka nalazimo svaku od deset cifara točno po jedanput, a kvocijent (0,0002055...) je *minimalan*.

Naći jednakost dvaju pozitivnih pravih razlomaka u kojoj će svaka od deset cifara ulaziti opet točno po jedanput ali tako da kvocijent bude *maksimalan*.

Odgovore poslati do 20. 12. 1987. Na kuverti napisati »NN 105«. Nagrade: 10 knjiga. Rezultati u br. 3/154.

b) Iz fizike: *Babić Jovan* (2), Ugljevik, 19, 22—24; *Babić Živomir* (3), Banjaluka, 19—22, 25; *Božanić Danijela* (2), Pančevo, 19, 21; *Čuturić Lazar* (2), Ugljevik, 19, 21; *Dejanović Alen* (2), Prijedor, 19, 21, *Dobnikar Jure* (1) Slov. Bistrica, 19, 23—25; *Đurković Zvjezdan* (2), Ugljevik, 19—21; *Glamočić Jadranka* (2), Futog, sve; *Gulan Robert* (3), Novska, sve osim 23; *Guzijan Miloš* (4), Zrenjanin, sve; *Hadžialjević Nermina* (3), Doboj, 19—22; *Kabashi Gazmend* (3), Sërbicë, sve osim 24; *Kalajac Enes* (2), Živinice, 19—21, 24, 25; *Kostadinović Tamara* (2), Bos. Novi, 19, 21; *Laci Vesna* (3), Varaždin, 19—23; *Medvid Boris* (3), Sinj, 20—22, 25; *Mičić Nenad* (3) Banjaluka, sve; *Marić Dragan* (3), Kruševac, 19, 21—24; *Medvid Boris* (3), Sinj, 20—22, 25; *Mičić Nenad* (3), Banja Luka, sve; *Miletić Predrag* (3), Foča, sve osim 19; *Milkov Marija* (1), Futog, 19, 20, 25; *Mišković Milovan* (3), Ključ, 19, 21, 22, 25; *Mitrović Mitar* (2), Ugljevik, 19, 20, 22, 24; *Mladenović Saša* (3), Split, 19—22; *Obradović Milan* (3), Novi Sad, sve; *Paar Dalibor* (3), Zagreb, 19—22; *Pokrajac Dragoljub* (2), Niš, 19, 20, 23; *Poljak Damir* (2), Sinj, sve osim 23; *Ramadani Ylber* (2), Priština, sve; *Rizvanović Etida* (2), Prijedor, 20, 21, 24; *Sabolić Dubravko* (3), Zagreb, sve osim 25; *Sadiković Vehbija* (3), Ključ, 19, 21, 25; *Selimbegović Alen* (1), Zagreb, 23, 25; *Slačala Dejan* (1), Prijedor, 19, 21, 22; *Sokolović Jovan* (2), Pirot, 19, 20, 22, 24; *Stranjak Armin* (2), Mostar, 21—23; *Šelmić Rastko* (2), Beograd, 20, 24, 25; *Škrtić Mario* (2), Karlovac, 19—21, 23, 24; *Tabaković Dario* (2), Banjaluka, sve osim 25; *Tabučić Dževad* (2), Foča, 19—21; *Tambača Josip* (2), Šibenik, 19—22, 25; *Tokić Branka* (3), Zadar, 19—21, 25; *Tošić Stevan* (2), Podr. Slatina, 19, 21; *Trajković Miroslav* (2), Niš, 23, 24 *Tužinski Dalibor* (2), Slav. Požega, sve osim 23; *Vilibić Ivica* (3), Split, 20, 21, 23; *Vučković Jelena* (2), Niš, 19, 20, 23—25; *Атанасов Ристе* (3), Кавадарци, 19—21, 23; *Васиљевић Виолета* (3), Битола, 19—22; *Манић Драган* (2), Пирот, све сем 21; *Маринова Весна* (3), Битола, све; *Петровић Саша* (3), Вршац, све; *Попов Марјан* (4), Кавадарци, 19—21.

c) Iz matematike za ekonomsko usmjerenje: *Aleksić Vera* (2), Sr. Mitrovica, 67, 70; *Laci Vesna* (3), Varaždin, sve osim 68; *Nikolin Bojana* (2), Pančevo, 67, 69, 70; *Parezanović Radomir* (2), Nikšić, 66, 67, 70; *Pokrajac Dragoljub* (2), Niš, sve sem 66; *Ramadani Ylber* (2) Priština, 70; *Selimbegović Alen* (1), Zagreb, 66, 67, 69, 70; *Šarić Milijana* (3), Beli Manastir, 69; *Šćulić Marija* (2), Slav. Požega, 70; *Takač Silvija* (3), Beli Manastir, 69; *Tokić Branka* (3), Zadar, 67, 69, 70; *Vilibić Ivica* (3), Split 67, 70.

SVIM SURADNICIMA

Svi rukopisi (po mogućnosti i učenička rješenja) treba da budu napisani pisaćim strojem, a crteži izrađeni tušem na posebnom čvrstom papiru ili paus-papiru. Rukopisi se ne vraćaju.

RJEŠAVATELJIMA ZADATAKA

U rješenjima treba uvijek napisati i sam zadatak s rednim brojem, ne pozivajući se na broj i datum »Mat.-fiz. lista« u kojem je bio postavljen. Svako rješenje zadatka pisati na posebnom papiru (četvrtini ili pola arka) i to samo na jednoj strani papira. Uz svako rješenje na vrhu papira treba potpuno ispisati tekst zadatka, i to u *istoj terminologiji* kao i rješenje. Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačiti razred, školu i mjesto.

Nečitljiva i neuredna rješenja neće se uopće uzeti u obzir.

Rješenja zadataka C) donosimo samo za učenike ekonomskih usmjerenja. Ona ne ulaze u »godišnji konkurs«.
